

异常值干扰下的加权中值截取相位检索算法

李晓东¹, 刘冠男², 付宁¹, 乔立岩¹

(1. 哈尔滨工业大学电子与信息工程学院, 哈尔滨 150001;

2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

摘要: 在航天领域的许多测量场景中, 信号的相位信息容易遭到破坏。本文旨在解决有异常值干扰的相位检索问题。中值可以对抗异常值, 故常作为正则化标准截取无相测量值, 这会导致可用测量值的减少, 从而提高测量复杂度。为克服这一难点, 进行加权处理, 提出了加权中值截取算法, 利用可以表征指向原信号概率的权值进一步挖掘了未被截取测量值的可用信息, 与同类算法相比, 在测量复杂度和对抗异常值干扰方面更为优越。

关键词: 相位检索; 异常值; 中值截取

中图分类号: V443.2

文献标志码: A

文章编号: 2096-4080 (2024) 03-0044-06

A Weighted Median Truncated Algorithm for Phase Retrieval with Outliers

LI Xiaodong¹, LIU Guannan², FU Ning¹, QIAO Liyan¹

(1. School of Electronics and Information Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;

2. Beijing Institute of Astronautical Systems Engineering, Beijing 100076, China)

Abstract: In numerous measurement scenarios within the aerospace domain, signal phase information often faces susceptibility to degradation. This article endeavors to address the challenge of phase retrieval amidst the presence of outliers. Leveraging the robustness of the median against outliers, it serves as a standard regularization technique to intercept phaseless measurements. However, this interception can potentially reduce available measurements and escalate measurement complexity. To surmount this obstacle, a novel weighted median truncation algorithm is proposed. This algorithm integrates weights that aptly capture the likelihood of referring to the original signal, thereby delving deeper into the available information of unmeasured values. Comparative analysis reveals that this approach offers superior measurement complexity and resilience against outlier interference when juxtaposed with similar algorithms.

Key words: Phase retrieval; Outliers; Median truncated

0 引言

信号的相位在许多航天应用中扮演着十分重要的角色^[1-2], 并且在多数情况下比信号的幅度携

带更多的信号信息^[3]。然而在航天领域的某些测量过程中, 由于条件的限制、信号相位的快速变化或环境造成的破坏, 要准确测量信号的相位是十分困难甚至是不可实现的。这样的无相测量广泛

收稿日期: 2024-01-23; 修订日期: 2024-04-08

基金项目: 国家自然科学基金 (62071149); 国家自然科学基金 (61671177); 鸿鹄创新中心开放基金

作者简介: 李晓东 (1997—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为相位检索、模拟信息转换技术

通信作者简介: 付宁 (1979—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为信息域采样理论及技术、稀疏信号处理及压缩感知、自动测试技术等

存在于其他各种应用场景中, 例如天线测量^[4]、光学成像^[5]和电机位置检测^[6]等, 随之而来的问题便是如何利用无相测量结果对原信号进行重建。已有学者对此展开研究, 并将这种仅利用线性测量的幅度信息对原信号进行恢复的过程称为相位检索。尽管这会增加后端信号处理过程的难度, 但无需测量相位这一突出优点使得相位检索被广泛应用于许多领域, 如 ISAR 雷达成像^[7]和量子力学^[8]等。得益于如此广泛的应用场景, 虽然相位检索问题是不适定的而且是 NP 难的^[9], 目前仍然有大量有效的求解算法被提出, 如 Gerchberg Saxton (GS) 算法^[10]、相位提升 (PhaseLift) 算法^[11]、Wirtinger 流 (Wirtinger Flow) 算法^[12]、截取 Wirtinger 流 (Truncated Wirtinger Flow, TWF) 算法^[13]和广义 Wirtinger 流 (Generalized Wirtinger Flow, GWF) 算法^[14]等。

在无相测量过程中经常会存在各种干扰, 这会造成相位检索模型的失配, 从而导致大多数算法失效。异常值便是一种广泛存在于相位检索问题中的干扰形式^[15], 针对这一问题, 一些学者已经提出不同相位检索模型下的抗异常值干扰算法。如针对傅里叶相位检索模型, Fu 等^[16]提出了一种双通道采样结构和有效的加权相位检索方法。研究最为广泛的是广义相位检索模型^[17], 其测量结果为对原信号进行独立同分布的随机高斯测量的幅度信息, 因此又被称为随机相位检索。针对这一模型下的异常值干扰, Hand^[18]证明相位提升 (PhaseLift) 算法的一种形式可以对抗任意的常数干扰, 然而这种基于凸优化的算法具有过高的计算复杂度。一种基于梯度下降的抗异常值干扰的快速算法被 Yi 等^[19]提出, 其具有较低的计算复杂度, 但缺少理论保证。Zhang 等^[20]给出了中值截取 Wirtinger 流 (Median-Truncated Wirtinger Flow, Median-TWF) 算法和中值重塑 Wirtinger 流 (Median-Reshaped Wirtinger Flow, Median-RWF) 算法, 这两个方法在具有低计算复杂度的同时具有良好的理论保证, 然而在利用中值对测量值进行修剪的过程中, 被修剪掉的测量值中常包含未被干扰的干净的测量值, 这不可避免地提高了无相测量过程的测量复杂度。

针对随机相位检索模型下的异常值干扰问题, 文中提出了一种有效的基于非凸优化的加权中值截取 (Weighted Median Truncated, WMT) 算法。在现有中值截取策略的基础上, 对未被截取的测量值增加可以表征其指向正确原信号概率的权值, 即对求解过程中的循环迭代步骤进行加权处理。通过数值仿真验证了所提出算法的有效性以及与现有方法相比在对抗异常值干扰和降低测量复杂度方面的优越性。在航天领域, 这种新型相位检索算法可能会极大地改善信号处理和测量技术, 从而提高航天器的性能和可靠性。如在轨道调整、星载遥感和通信链路中, 准确的信号相位测量对于确保任务成功至关重要。通过将这种算法应用于航天领域, 可以更好地应对异常值干扰, 提高数据处理的效率和准确性, 从而推动航天技术的发展。

1 加权中值截取算法及理论保证

1.1 加权中值截取算法

相位检索问题在数学领域又被称为二次方程组求解问题^[21], 可被定义为经验损失函数最小化 (或最大似然估计 (Maximum Likelihood Estimate, MLE)) 问题

$$\min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} \mathbf{R}(\mathbf{z}) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ell(\mathbf{z}; y_i) \quad (1)$$

其中, y_i 为无相测量值, $\ell(\mathbf{z}; y_i)$ 可以为基于幅度^[22]、基于强度^[12]或基于相关泊松似然的损失函数^[13], m 为总测量数, 所使用的经验损失函数参见文献 [23]。

所提出算法通过最小化损失函数来估计原信号, 其求解过程包含初始化和基于正则梯度下降的循环迭代两个步骤。得益于中值所具有的对异常值的鲁棒性, 在两个步骤中均采用采样中值为标准对无相测量结果进行截取, 这使得即使在异常值干扰的情况下, 所提出的算法仍十分有效。在算法的第一阶段, 首先对待重建的原信号进行初始估计, 即对估计信号 \mathbf{z} 进行初始化。接下来在算法的第二阶段, 利用基于正则化梯度下降的方法对 \mathbf{z} 进行循环迭代求解, 以获得原信号的估计。加权中值截取算法的过程见表 1。

表 1 加权中值截取算法过程

Tab. 1 Weighted median truncated algorithm

算法 1: 加权中值截取算法
输入: 无相测量结果 \mathbf{y} , 测量向量 $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^m$
参数: 最大迭代数 T , 迭代步长 μ , 权值参数 γ, β , 中值截取参数 α_y, α'_h
初始化: $\mathbf{z}^{(0)} := \sqrt{\text{med}(\mathbf{y})/\theta_{1/2}(K)} \tilde{\mathbf{z}}$, 其中 $\tilde{\mathbf{z}}$ 是 $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \mathbf{1}_{\{(y_i \leq \alpha_y^2 \lambda)\}}$ 的单位主特征向量
循环迭代: 对于 $t = 0; T-1$, 做如下迭代运算
$\mathbf{z}^{(t+1)} = \mathbf{z}^{(t)} - \frac{\mu}{m} \sum_{i \in E'_t} \omega_i^{(t)} \left(\mathbf{a}_i^T \mathbf{z}^{(t)} - \sqrt{y_i} \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{z}^{(t)}}{ \mathbf{a}_i^T \mathbf{z}^{(t)} } \right) \mathbf{a}_i$
其中, $\omega_i^{(t)} := 1/(1 + \beta(\sqrt{y_i}/ \mathbf{a}_i^T \mathbf{z}^{(t)}))$, $1 \leq i \leq m$
$E'_t := \{i \mid \text{dist}_y \leq \alpha'_h \cdot \text{med}(\text{dist}_y)\}$, $\text{dist}_y = \sqrt{y_i} - \mathbf{a}_i^T \mathbf{z}^{(t)} $
输出: $\mathbf{z}^{(T-1)}$

1.2 加权中值截取算法的理论保证

首先, 给出估计信号 \mathbf{z} 初始化的理论保证。针对初始化的幅值, 当 s 足够小时, 初始化幅值为

$$\lambda_0 = \sqrt{\text{med}(\mathbf{y})/\theta_{1/2}(K)} \quad (2)$$

其中, $\theta_{1/2}(K)$ 为 K 的 $1/2$ 分位数, 其中 K 为卡方分布变量的累积分布函数, $\text{med}(\mathbf{y}) = \theta_{1/2}(\{(y_i)\})$ 。针对初始化的方向, 当 m/n 足够大时, 对于任意给定的 $\delta > 0$, 可以得到 $\text{dist}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{x}) \leq \delta$, 其中 $\tilde{\mathbf{z}}$ 为初始化方向。综合考虑上述幅值和方向初始化, 最终的初始化结果为

$$\mathbf{z}^{(0)} := \sqrt{\text{med}(\mathbf{y})/\theta_{1/2}(K)} \tilde{\mathbf{z}} \quad (3)$$

当 s 足够小时

$$\text{dist}(\mathbf{z}^{(0)}, \mathbf{x}) \leq \frac{1}{11} \|\mathbf{x}\| \quad (4)$$

接下来, 给出无噪声情况下信号重建有效性的理论保证。当步长 μ 以及 $\lambda + \mu(1.8 + \delta)^2$ 小于一定值时, 所提出算法中循环迭代步骤中的迭代梯度 $\nabla \mathbf{R}_{\text{trw}}(\mathbf{z})$ 满足正则化条件, 则此算法可以在无噪声情况下收敛到正确的原信号 \mathbf{x} 。其中正则化条件的数学描述为: 只要满足 $\|\mathbf{h}\| := \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leq c \|\mathbf{x}\|$, 就有

$$\langle \nabla \mathbf{R}_{\text{trw}}(\mathbf{z}), \mathbf{h} \rangle \geq \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{R}_{\text{trw}}(\mathbf{z})\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{h}\|^2 \quad (5)$$

那么称梯度 $\nabla \mathbf{R}_{\text{trw}}(\mathbf{z})$ 满足正则化条件。在此条件下, 如果初始化估计足够接近于原信号并且 $\mu\lambda < 1$, 那么梯度下降迭代过程 $\mathbf{z}^{(t+1)} = \mathbf{z}^{(t)} - \mu \nabla \mathbf{R}_{\text{trw}}(\mathbf{z})$ 可以收敛至原信号 \mathbf{x} [12]。

最后, 给出存在稀疏异常值干扰情况下信号重建有效性的理论保证。与无噪声情况下的思路相类似, 这一目标可转换为证明迭代梯度 $\nabla \mathbf{R}_{\text{trw}}(\mathbf{z})$ 在稀疏异常值干扰下满足正则化条件。因为

$\nabla \mathbf{R}_{\text{trw}}(\mathbf{z}) = \nabla \mathbf{R}_{\text{tr}}(\mathbf{z})$, 所以应用文献 [20] 中第 VI. B 节中的证明可以得到

$$\|\nabla \mathbf{R}_{\text{trw}}\| \leq \|\nabla \mathbf{R}_{\text{tr}}\| \leq f(\delta, s) \|\mathbf{h}\| \quad (6)$$

因此, 如果合适地选择 μ 和 λ , 并且 δ 和 s 充分小, 那么在异常值干扰情况下所提出算法的迭代梯度可以满足正则化条件, 即所提出算法在稀疏异常值干扰情况下仍有效。

2 数值仿真及结果分析

2.1 评价指标

重构信号准确性指标为

$$\text{Relative error} := \text{dist}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) / \|\mathbf{x}\| \quad (7)$$

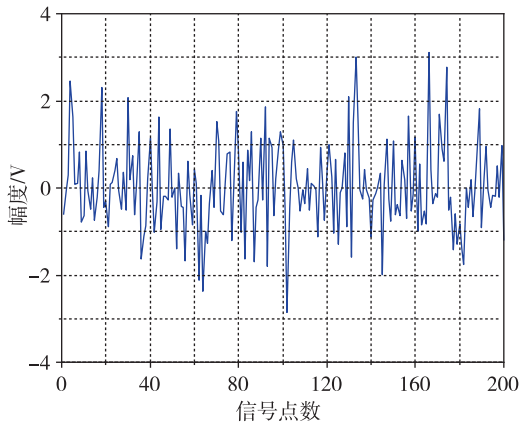
其中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 为待重构的未知原信号。定义 $\text{Relative error} \leq 10^{-8}$ 为重构成功。

2.2 有效性验证

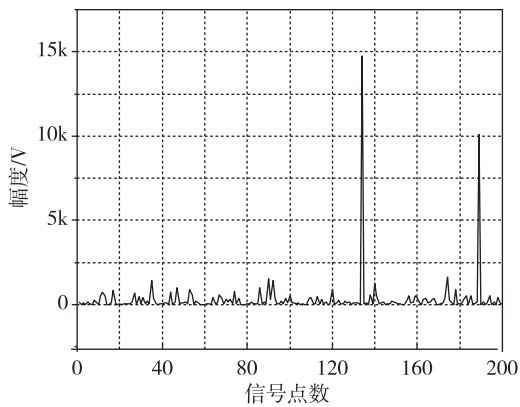
实验中设定原信号为长度 $n = 100$ 的随机信号, 测量值数目 $m = 3n$, 算法迭代次数 T 为 500。在测量结果中添加比例 $s = 0.01$, 幅值在 $(0, 10\max(y_i))$ 内随机选取的异常值干扰。图 1 为仿真各步骤结果图, 提出相位检索算法可在受异常值干扰情况下有效地精确重建原信号。

2.3 初始化性能对比

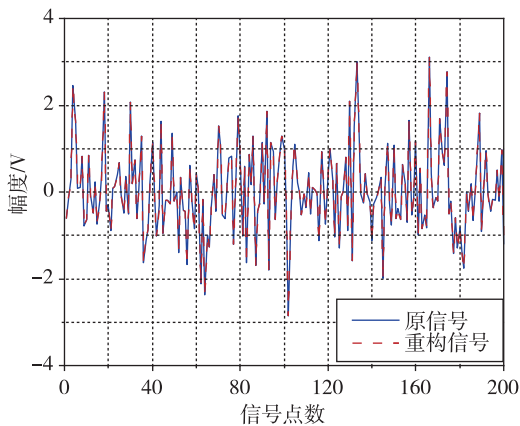
仿真中的对比方法为目前主流用于非凸优化相位检索算法的初始化方法, 包括谱初始化 (Spectral Initialization) 方法 [12]、零初始化 (Null Initialization) 方法 [24]、重加权最大相关初始化方法 [25] 和中值截取谱初始化方法 [20]。用于对比的方法参数均为所提出方法文献中的推荐参数。仿真实验中, 设定信号长度 n 为从 1 000 到 5 000 间隔 200 的均匀取值。另外设定无相测量值的数目 $m =$



(a) 原信号



(b) 无相测量结果



(c) 原信号与重构信号对比

图 1 有效性验证

Fig. 1 Verification of validity

$2n - 1$, 其中异常值的比率 $s = 0.005$ 。这样的无相测量值数目已经被证明是极限采样复杂度^[26]。每个信号长度情况下的重构误差为 100 次蒙特卡罗实验所得到 *Relative error* 的平均值。图 2 为各种初始化方法的初始化相关误差随原信号长度的变化曲线。从仿真实验结果可以看出, 与目前较为先

进的几种初始化方法相比, 本文初始化方法具有更为优良的性能, 而且随着原信号长度的增加, 这种性能优势保持稳定。

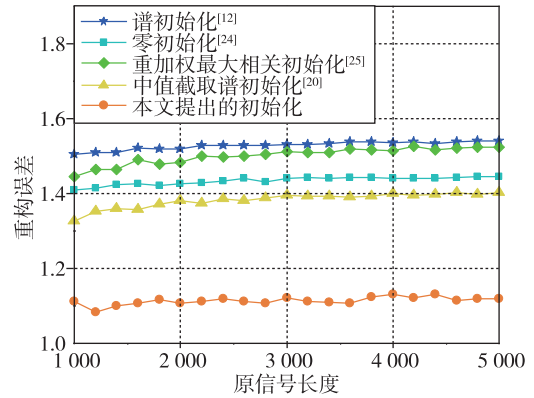


图 2 初始化性能对比

Fig. 2 Comparison of initialization performance

2.4 不同测量比率下算法性能对比

仿真实验中所对比的方法为目前主流的基于迭代求解的非凸优化相位检索方法, 包括中值重塑 Wirtinger 流 (Median-RWF) 算法^[20], 中值截取 Wirtinger 流 (Median-TWF) 算法^[20], 截取 Wirtinger 流 (TWF) 算法^[13] 以及鲁棒 Wirtinger 流 (Roubust-WF) 算法^[27]。所有对比算法的参数均设置为对应文献所推荐的参数。在实验中固定原信号的长度 n 为 100, 设定无相测量比率 m/n 为从 1~6 以 0.1 为间隔的均匀取值。每个测量比率下的重构成功率是进行 5 000 次蒙特卡罗实验后所得到的。另外, 所有算法的迭代次数 T 均设定为 500。图 3 为各种同类相位检索算法重构成功率随无相测量比率的变化曲线。

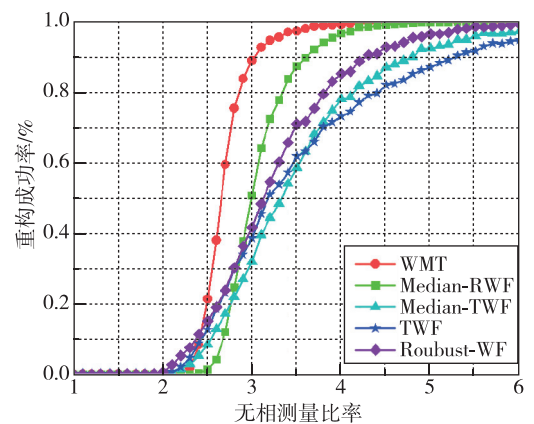


图 3 不同无相测量比率下的重构成功率

Fig. 3 Reconstruction success rates at different ratio of phaseless measurements

从仿真结果可以看出,与目前其他的先进算法相比,本文算法在不同无相测量比率下均具有更为优良的性能。此外,随着无相测量比率的增加所有算法的成功率均不断提高,这是因为测量比率的提升意味着可用信息的增多。另外,当无相测量值数目 m 约等于原信号长度 4 倍时,算法可以实现对原信号 100% 的成功重构,而其他同类方法则无法实现。这样的优异性能一方面取决于仿真实验 2 中所证明的初始化方法的优越性,另一方面则是因为循环迭代过程中的加权处理额外挖掘了无相测量值的有效信息。

2.5 不同异常值比例下算法性能对比

本仿真实验探究在无相测量存在稀疏异常值干扰的情况下,与现有方法在不同比例异常值干扰下的性能对比。此仿真实验中所选取的对比算法与仿真实验 3 中相同,其中比较特别的是鲁棒 Wirtinger 流算法需要先验已知异常值在测量结果中的比例。在对比实验中,设定原信号长度 n 为 100,测量值数目 $m = 8n$ 。这样选择的原因是在这一无相测量比率下所有对比的算法都可以在无噪声情况下实现 100% 的信号重构,由此可以屏蔽无相测量比率对重构成功率的影响。另外设定测量值中异常值的比例 s 为从 0~0.49 以 0.01 为间隔的均匀取值。异常值的幅度则为 $(0, \eta_{\max})$ 内的随机取值,其中 $\eta_{\max} = 100\max(y_i)$ 。每个异常值比例下的重构成功率是进行 5 000 次蒙特卡罗实验后所得到的。所有算法的迭代次数 T 均设定为 500。图 4 为各种同类相位检索算法重构成功率随异常值比例的变化曲线。

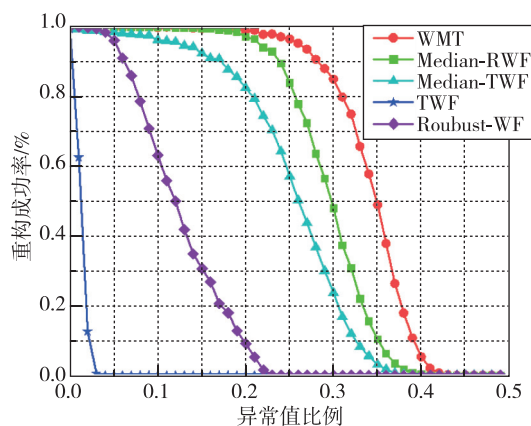


图 4 不同异常值比例下的重构成功率

Fig. 4 Reconstruction success rate under different ratio of outliers

从仿真结果可以看出,在异常值稀疏且未知任何其先验信息的情况下,可以实现对原信号的准确恢复,这与理论分析相一致。所对比算法中的 Median-RWF 算法和 Median-TWF 算法同样使用中值对测量值进行截取以对抗异常值的干扰,因此具有与本文算法相似的性能,文中采用的重加权处理与这两种算法相比在性能上更具有优势。截取 Wirtinger 流算法并不是针对异常值干扰所提出的算法,因此即使在异常值比例很小的情况下其也无法成功地重构原信号。另外,即使在已知异常值先验信息的情况下,鲁棒 Wirtinger 流算法对抗异常值干扰的性能仍差于文中所提出的算法。

3 结束语

针对稀疏异常值干扰下的随机相位检索,提出了一种利用中值截取和加权策略相结合的基于梯度下降的非凸优化算法。其中采样中值作为正则化标准对无相测量值进行截取以对抗异常值干扰。加权策略则通过挖掘被保留测量值中的有效信息,弥补了未受干扰的正确测量值被截取掉而导致的测量复杂度增加的问题。本文所提出的算法可以在稀疏异常值干扰下,以低测量复杂度正确地求解随机相位检索问题,其有效性在理论和数值仿真中均可得到证明。此外数值仿真结果还显示了其与同类算法相比所具有的优越性。

参考文献

- [1] 练秋生,赵晓蕊,石保顺,等.基于卡通-纹理模型的相位恢复算法[J].电子与信息学报,2016,38(8):1991-1998.
- [2] 练秋生,齐秀梅,陈书贞,等.基于结构稀疏性的单次曝光相位成像算法[J].电子与信息学报,2017,39(7):1546-1553.
- [3] Shechtman Y, Eldar Y C, Cohen O, et al. Phase retrieval with application to optical imaging: a contemporary overview[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2015, 32(3): 87-109.
- [4] Xiong C, Xiao G B. Excitation retrieval for phased arrays with magnitude-only fields measured at a fixed location[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2021, 20(2): 264-268.
- [5] 程鸿,刘勇,胡佳杰,等.单透镜系统中与色散融合的混合相位恢复方法[J].红外与激光工程,2020,49(10):184-192.
- [6] Zhao J, Zhou Y, Zhao J W, et al. Precision position

- measurement of PMSLM based on ApFFT and temporal sinusoidal fringe pattern phase retrieval [J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2020, 16(12): 7591-7601.
- [7] 史洪印, 郭建文, 刘悦, 等. 基于 ISAR 和相位恢复的 SAR 运动目标成像方法[J]. 信号处理, 2020, 36(4): 541-549.
- [8] 许志强. 相位恢复: 理论、模型与算法[J]. 计算数学, 2022, 44(1): 1-18.
- [9] Ma C, Wang K Z, Chi Y J, et al. Implicit regularization in nonconvex statistical estimation: gradient descent converges linearly for phase retrieval, matrix completion, and blind deconvolution[J]. Foundations of Computational Mathematics, 2020, 20(3): 451-632.
- [10] Gerchberg R W, A. S. W. O. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures[J]. Optik, 1972, 35: 237-250.
- [11] Candès E J, Strohmer T, Vershynina V. PhaseLift: exact and stable signal recovery from magnitude measurements via convex programming[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2013, 66(8): 1241-1274.
- [12] Candès E J, Li X D, Soltanolkotabi M. Phase retrieval via Wirtinger flow: theory and algorithms [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(4): 1985-2007.
- [13] Chen Y X, Candès E J. Solving random quadratic systems of equations is nearly as easy as solving linear systems[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2017, 70(5): 822-883.
- [14] Yonel B, Son I Y, Yazici B. Exact multistatic interferometric imaging via generalized Wirtinger flow[J]. IEEE Transactions on Computational Imaging, 2020, 6: 711-726.
- [15] Jiang X, So H C, Liu X Z. Robust phase retrieval with outliers[C]//Proceedings of the ICASSP 2020-2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). Barcelona, Spain: IEEE Press, 2020: 5320-5324.
- [16] Fu N, Zheng P J, Li X D, et al. Weighted phase retrieval of Fourier measurement with outliers: measurement structure and reconstruction algorithm [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2021, 70: 6501514.
- [17] Qu Q, Zhang Y Q, Eldar Y C, et al. Convolutional phase retrieval via gradient descent [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2020, 66(3): 1785-1821.
- [18] Hand P. PhaseLift is robust to a constant fraction of arbitrary errors[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2017, 42(3): 550-562.
- [19] Yi X Y, Park D, Chen Y D, et al. Fast algorithms for robust PCA via gradient descent [EB/OL]. (2016): 1605.07784.
- [20] Zhang H S, Chi Y J, Liang Y B. Median-truncated nonconvex approach for phase retrieval with outliers [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2018, 64(11): 7287-7310.
- [21] Shechtman Y, Beck A, Eldar Y C. GESPAR: efficient phase retrieval of sparse signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(4): 928-938.
- [22] Wang G, Giannakis G B, Eldar Y C. Solving systems of random quadratic equations via truncated amplitude flow[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2018, 64(2): 773-794.
- [23] Zhou Y, Liang Y B, Chi Y J. A nonconvex approach for phase retrieval: reshaped Wirtinger flow and incremental algorithms[J]. Journal of Machine Learning Research, 2017, 18(1): 1-35.
- [24] Chen P W, Albert F J, Liu G R. Phase retrieval with one or two diffraction patterns by alternating projections with the null initialization[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2018, 24(3): 719-758.
- [25] Wang G, Giannakis G B, Saad Y, et al. Phase retrieval via reweighted amplitude flow[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(11): 2818-2833.
- [26] Balan R, Casazza P, Edidin D. On signal reconstruction without phase[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2006, 20(3): 345-356.
- [27] Chen J, Wang L, Zhang X, et al. Robust Wirtinger flow for phase retrieval with arbitrary corruption[J]. ArXiv, 2017 [Online]. Available: <http://arxiv.org/pdf/1704.06256>.

引用格式: 李晓东, 刘冠男, 付宁, 等. 异常值干扰下的加权中值截取相位检索算法[J]. 宇航总体技术, 2024, 8(3): 44-49.

Citation: Li X D, Liu G N, Fu N, et al. A weighted median truncated algorithm for phase retrieval with outliers [J]. Astronautical Systems Engineering Technology, 2024, 8(3): 44-49.