

基于等几何方法的功能梯度 Mindlin 板结构拓扑优化设计

刘宏亮^{1,2}, 姚力铭¹, 王培金¹

- 沈阳航空航天大学辽宁省飞行器复合材料结构分析与仿真重点实验室, 沈阳 110136;
- 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要: 提出一种基于等几何分析的功能梯度 Mindlin 板结构拓扑优化方法, 实现了沿着板面内方向梯度材料渐变与结构拓扑协同设计。基于等几何分析中的非均匀有理 B 样条 (non-uniform rational B-spline, NURBS) 基函数, 保证了板结构建模、仿真分析和优化设计的参数化统一。由于等几何方法基函数的高阶连续性、非负性、规范性等特点, 建立了合理的设计变量与梯度材料相对密度的分布关系。为了克服 Mindlin 板仿真分析的数值闭锁问题, 采用 NURBS 等几何分析单元的缩减积分策略。数值算例展示了该方法的有效性, 且获得了具有清晰细节特征的功能梯度板新型设计方案。结果表明, 相比于预先定义材料配比, 该方法可以实现功能梯度材料属性与结构拓扑的协同优化设计。

关键词: 功能梯度材料; Mindlin 板; 等几何分析; 拓扑优化

中图分类号: V214.19 **文献标志码:** A **文章编号:** 2096-4080 (2023) 05-0012-08

Topology Optimization Design of Functionally Graded Mindlin Plate Structures Based on Isogeometric Method

LIU Hongliang^{1,2}, YAO Liming¹, WANG Peijin¹

- Key Laboratory of Liaoning Province for Composite Structural Analysis of Aircraft and Simulation, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China;
- State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: In this paper, a topology optimization approach of functionally graded Mindlin plate structures based on isogeometric analysis is proposed, in order to realize the collaborative design of material gradient along the in-plane direction and structure topology. Based on the non-uniform rational B-spline (NURBS) basis function in isogeometric analysis, the parametric unification of modeling, simulation analysis and optimization design of plate structures is ensured. Due to the high-order continuity, non-negative and normative characteristics of the basis functions, a reasonable distribution relationship between the design variable and the relative density of the gradient material is established. In order to overcome the numerical locking problem of Mindlin plate analysis, the reduced integration strategy of NURBS isogeometric elements is adopted. Numerical examples show the effectiveness of the proposed method, and the design scheme of functionally gra-

收稿日期: 2023-07-10; 修订日期: 2023-08-25

基金项目: 国家自然科学基金 (12002218); 大连理工大学国家重点实验室开放基金 (GZ22108)

作者简介: 刘宏亮 (1987-), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为高性能有限元分析与结构优化设计。

ded plate with clear and detailed features is obtained. The results show that compared with the pre-defined material ratio, the proposed method can realize the simultaneous optimization design of functionally graded material properties and structure topology.

Key words: Functionally graded material; Mindlin plate; Isogeometric analysis; Topology optimization

0 引言

随着高新技术的发展,飞行器通常需要在恶劣极端的环境下长时间工作^[1],对结构和材料性能的要求越来越高。由于比刚度和比强度等方面的优点,复合材料板在航空航天工业的应用愈发普遍。与传统的复合材料板不同,功能梯度复合板具有材料相之间平滑过渡且连续分布的特点,可以在很大程度上避免材料界面的出现对结构力学性能的影响,例如降低应力集中和减少残余应力。这实际上也是功能梯度结构相比传统复合材料结构的一个优势^[2-3]。

在航空航天产品设计过程中,利用优化方法获得轻质高承载结构是实现装备轻量化和高性能化的一个重要且有效途径。相比尺寸和形状优化,结构拓扑优化的设计潜力更大,对结构的综合性能提升也更加明显,但同时其挑战性也更大^[4-5]。目前,各种拓扑优化方法不断发展,例如变密度方法^[6]、渐进结构优化方法^[7]、水平集方法^[8]、移动变形组件/孔洞方法^[9-10]等。而且,相较于单相材料拓扑优化,考虑多相材料的结构拓扑优化研究近年来受到了更多的关注^[11-13]。然而,多材料结构拓扑优化需要一个合适的优化模型,可以有效描述迭代过程中设计域内不同材料的分布,同时应该方便于设计优化过程的灵敏度分析计算^[14-16]。

功能梯度结构的拓扑优化可以是单材料优化,也可以是多材料优化。当功能梯度结构的材料渐变方式确定时,只优化结构的拓扑构型属于单材料优化,例如,材料沿着厚度或者面内方向渐变且其分布确定的功能梯度板结构拓扑优化^[17]。当梯度材料渐变与结构拓扑同步优化以实现功能梯度结构性能最优时,其本质上是一种多材料结构拓扑优化^[18-19]。与传统多材料结构拓扑优化不同的是,这样的设计在材料相之间具有平滑且连续分布的特点。值得指出,现有的功能梯度结构拓扑优化研究主要考虑平面问题,尚未考虑工程中普遍存在的板结构设计。事实上,板结构的多材料拓扑优化设计研究也是近年来才受到关注^[20-21]。因此,本文研究的重点是一种沿着面内方向材料

渐变的功能梯度板结构拓扑与材料分布协同设计优化问题。

对于板结构的分析和设计,目前主要采用基于有限元方法的 Kirchhoff 板单元和 Mindlin 板单元。其中, Kirchhoff 板单元适合薄板模型,而 Mindlin 板单元适合中厚板模型。薄板模型的适用范围有限,因此 Mindlin 板单元在工程中的应用范围更广。然而, Mindlin 板单元进行有限元分析时可能会存在数值闭锁问题,严重影响数值计算的精度。为了实现更具工程应用性的板结构拓扑优化,克服数值求解难题,本文基于等几何分析^[22]发展一种功能梯度 Mindlin 板结构的拓扑优化设计方法。采用具有高阶连续性的非均匀有理 B 样条 (non-uniform rational B-spline, NURBS) 基函数作为功能梯度板结构建模、分析和设计的基础,获得了梯度材料与结构拓扑协同优化设计方案。

1 功能梯度 Mindlin 板等几何拓扑优化设计

1.1 Mindlin 板结构等几何分析

本文考虑的 Mindlin 板基于一阶剪切变形理论,假设板中面的法向纤维在变形过程中保持平直,长度不变,但不一定保持垂直于中面。因此,横向剪切变形不可忽略, Mindlin 板的应变能由下式给出

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}_f^T \boldsymbol{\epsilon}_f dV + \frac{\alpha}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}_c^T \boldsymbol{\epsilon}_c dV \quad (1)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}_f$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_f$ 是弯曲应力和应变, $\boldsymbol{\sigma}_c$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_c$ 是横向剪切应力和应变, α 为剪切修正系数。线弹性应力应变关系可定义为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_f &= \mathbf{D}_f \boldsymbol{\epsilon}_f \\ \boldsymbol{\sigma}_c &= \mathbf{D}_c \boldsymbol{\epsilon}_c \end{aligned} \quad (2)$$

其中, \mathbf{D}_f 和 \mathbf{D}_c 分别表示弯曲项与剪切项的弹性常数矩阵,即

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_f &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_c &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

式中, E 是弹性模量, ν 是泊松比, G 则是剪切模

量。将式(2)和式(3)带入 Mindlin 板应变能式中可得

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_f^T \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f dV + \frac{\alpha}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_c^T \mathbf{D}_c \boldsymbol{\varepsilon}_c dV \quad (4)$$

基于等几何分析,利用 NURBS 曲面表示结构的几何模型,即

$$S(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{T}_{i,j} \quad (5)$$

式中, $\mathbf{T}_{i,j}$ 为曲面的控制点, $R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ 表示 NURBS 基函数, p 和 q 分别表示曲面 $\boldsymbol{\xi}$ 方向和 $\boldsymbol{\eta}$ 方向基函数的阶数,其表达式可定义为

$$R_{i,j}^{p,q} = \frac{N_{i,p}(\boldsymbol{\xi}) M_{j,q}(\boldsymbol{\eta}) \omega_{i,j}}{\sum_k \sum_l N_{k,p}(\boldsymbol{\xi}) M_{l,q}(\boldsymbol{\eta}) \omega_{k,l}} \quad (6)$$

式中, $N_{i,p}$ 和 $M_{j,q}$ 分别表示定义在节点矢量 $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m1}\}$ 和 $\{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m1}\}$ 上的 B 样条基函数, $\omega_{i,j}$ 是控制点对应的权重系数。

在 Mindlin 板结构等几何分析中, NURBS 基函数不仅用于结构几何模型的定义,同时也作为等参元的形函数。离散后的 Mindlin 板线弹性控制方程可表示为

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (7)$$

式中, \mathbf{U} 为位移矢量, \mathbf{K} 表示结构的整体刚度阵,它由单元刚度阵 \mathbf{K}^e 组装而成,表示如下

$$\mathbf{K}^e = \frac{h^3}{12} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_f^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f d\Omega^e + \alpha h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c d\Omega^e$$

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{u}_{i,j} \quad (8)$$

式中, \mathbf{B}_f 和 \mathbf{B}_c 分别为弯曲项和剪切项的应变位移矩阵, h 表示板的厚度, $\mathbf{u}_{i,j}$ 为结构的位移场。

本文利用等几何分析的 k 细分方案可以实现 NURBS 基函数跨单元高阶的 C^{p-1} 次连续,在很大程度上可以缓解闭锁作用的影响。对于较薄的板模型,将采用 NURBS 等几何分析单元结合缩减积分的策略解决数值闭锁问题。

为了构建一个基于连续密度的梯度渐变结构优化问题,式(8)中的弹性系数矩阵近似为不同材料相的弹性常数,这将在下面讨论的插值方案中实现。

1.2 功能梯度拓扑优化的插值方案

在功能梯度结构中,材料之间不存在明确的界面,材料性能平滑变化。借鉴基于 SIMP 的变密度方法插值方案,假设板由两种材料构成,弹性模量分别为 E_1 和 E_2 ,通过设计域内某一点上两种材料所占的百分比,即体积分数来表示这种连

续变化材料的性质。

功能梯度材料性质的计算通常采用数值均匀化法和混合法。本文基于混合法,假设两种材料均匀混合,没有微观结构,如图1所示。目前,被广泛采用的几种混合模型包括 Voigt 模型、Halpin-Tsai 复合模型、Voigt-Reuss 界限和 Hashin-Shtrikman 界限^[23]。本文研究重点是采用等几何方法实现优化设计,因此选择使用各向同性复合材料的 Hashin-Shtrikman 上界和下界的平均值作为材料模型。

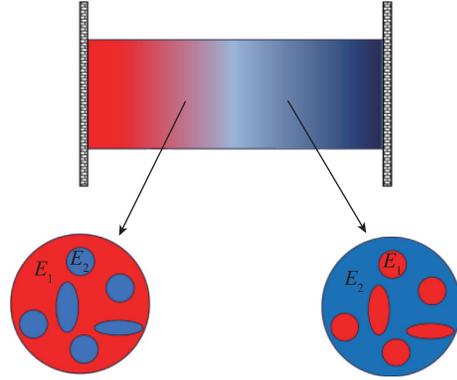


图1 结构中某一点材料混合物

Fig. 1 A mixture of materials at any point in a structure

当两种材料的泊松比等于 1/3 时, Hashin-Shtrikam 的上限和下限可简化为杨氏模量条件

$$\text{LowerBound: } \mathbf{E}(y)_{\text{HS}}^- = \frac{(2+y)E_1 + (1-y)E_2}{2(1-y)E_1 + (1+2y)E_2} E_2$$

$$\text{UpperBound: } \mathbf{E}(y)_{\text{HS}}^+ = \frac{yE_1 + (3-y)E_2}{(3-2y)E_1 + 2yE_2} E_1 \quad (9)$$

当 $y \rightarrow 1$ 时, Hashin-Shtrikam 模型上下限均为 E_1 , 当 $y \rightarrow 0$ 时, Hashin-Shtrikam 模型上下限均为 E_2 。假设 $E_1 > E_2$, 当 $y=1$ 时, 此时结构中某一处全为强材料, 当 $y=0$ 时即为弱材料。当结构中一点是两种材料均匀混合时, 采用 Hashin-Shtrikam 模型上下限均值近似表示为

$$\mathbf{E}(y) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(y)_{\text{HS}}^- + \mathbf{E}(y)_{\text{HS}}^+] \quad (10)$$

借鉴 SIMP 方法, 各向同性均质材料的性质被描述为 $E(x) = x^p E_0$, 设计变量为 0 时表示此处为优化所产生的孔洞。为了实现材料属性和结构拓扑的协同设计, 功能梯度材料的插值模型被定义为

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{1}{2} x^p [\mathbf{E}(y)_{\text{HS}}^- + \mathbf{E}(y)_{\text{HS}}^+] \quad (11)$$

式中, p 为惩罚系数。值得指出, 对于式(11)中的设计变量 y 并不需要惩罚, 因为设计目标是获得光滑

渐变的功能梯度结构。为了避免数值奇异, 插值格式中采用一个足够小的量纲为 1 的数 E_{\min} , 即

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{1}{2}x^p[\mathbf{E}(y)_{\bar{H}S} + \mathbf{E}(y)_{\bar{H}S}^+] + (1-x^p)E_{\min} \quad (12)$$

1.3 功能梯度结构拓扑与材料协同优化列式

考虑体积约束下的功能梯度 Mindlin 板结构最小柔顺度优化问题, 当功能梯度材料是由两种材料(例如金属与陶瓷)构成时, 其对应的拓扑优化列式可以表示为

$$\begin{aligned} \text{minimize: } & J(x_i, y_i) = \mathbf{F}^T \mathbf{U}(x_i, y_i) \\ \text{s. t. } & \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \\ \sum_{i=1}^N x_i V_e \leq f_{wr} V_0 \\ \sum_{e=1}^N x_i y_i V_i \leq f_{vy} V_0 \\ 0 < E_{\min} \leq x_i \leq 1 \\ y_m \leq y_i \leq y_M \\ i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

式中, J 表示目标函数即结构的柔顺度, x_i 和 y_i 表示控制点处的设计变量, 分别对应总材料的体分比和强材料的体分比, V_e 表示 NURBS 单元体积, V_0 表示结构总体积, f_{wr} 和 f_{vy} 分别为材料用量的限制分数, 即体积分数。 f_{wr} 限制结构的总材料用量, f_{vy} 则控制有材料处的强材料占比。 y_m 和 y_M 为给定设计变量 y_i 的上下限, 由式(9)可知, 若 y_m 和 y_M 取 0 和 1 则对应为 Hashin-Shtrikam 模型的上下限, 为了保证实现强弱材料的光滑渐变, 本文中 y_m 和 y_M 分别设置为 0.1 和 0.9。

对于本文基于等几何方法的功能梯度 Mindlin 板结构拓扑优化, 用于几何建模和结构分析的 NURBS 基函数也用于表示相对密度场, 即

$$\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \Theta_{i,j} \quad (14)$$

其中, Θ 表示设计变量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 组成的集合。由于 NURBS 基函数的非负性和规范性, 当设计变量在给定的设计区间变化时, 所对应的相对密度分布也会满足规定的区间分布, 从而建立起合理的控制点密度设计变量和材料相对密度分布之间的映射关系。此外, NURBS 基函数的高阶连续性可以避免棋盘格模式等数值问题^[24]。

2 设计优化灵敏度分析

本文采用基于梯度的移动渐进线法^[25]

(MMA) 来更新设计变量, 进而求解建立的优化列式(13)。这里需要计算目标函数和约束函数的灵敏度。功能梯度板的几何建模、结构分析和材料分布场采用统一的参数化, NURBS 基函数的特性保证了解析灵敏度的有效计算。目标函数对于设计变量 x_e 的灵敏度可表示为

$$\frac{\partial J}{\partial x_e} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_e} \mathbf{U} = -\sum_e^N \mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial x_e} \mathbf{U}_e \quad (15)$$

式中单元刚度阵对设计变量 x_e 的导数表达式为

$$\frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial x_e} = \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_e} \quad (16)$$

根据链式求导法则可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial \mathbf{D}} &= \frac{h^3}{12} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_f^T \frac{\partial \mathbf{D}_f}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{B}_f d\Omega^e + \\ &\alpha h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_c^T \frac{\partial \mathbf{D}_c}{\partial \mathbf{E}} \mathbf{B}_c d\Omega^e \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)中 Mindlin 板单元刚度阵由两项组成, 分别为弯曲项与剪切项, 则 $\partial \mathbf{E} / \partial x_e$ 的计算表达式为

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_e} = \frac{1}{2} p x_e^{p-1} [\mathbf{E}(y)_{\bar{H}S} + \mathbf{E}(y)_{\bar{H}S}^+] \quad (18)$$

由式(15)和式(18)可得

$$\frac{\partial J}{\partial x_e} = -\frac{1}{2} p x_e^{p-1} \sum_e^N \mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial x_e} \mathbf{U}_e \quad (19)$$

目标函数对于设计变量 y_e 的灵敏度表达式为

$$\frac{\partial J}{\partial y_e} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial y_e} \mathbf{U} = -\sum_e^N \mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial y_e} \mathbf{U}_e \quad (20)$$

式中, $\partial \mathbf{K}^e / \partial y_e$ 可以参考式(16)和式(17), 而弹性模量对设计变量 y_e 的一阶导数为

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_e} = \frac{1}{2} x_e^p [\mathbf{E}'(y)_{\bar{H}S} + \mathbf{E}'(y)_{\bar{H}S}^+] \quad (21)$$

式中, $\mathbf{E}'(y)$ 表示 Hashin-Shtrikam 界限对设计变量 y_e 求导, 可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}(y)_{\bar{H}S}}{\partial y_e} &= \frac{(E_1 E_2 - E_2 E_2)[2(1-y)E_1 + (1+2y)E_2]}{[2(1-y)E_1 + (1+2y)E_2]^2} - \\ &\frac{2(E_2 - E_1)[(2+y)E_1 E_2 + (1-y)E_2 E_2]}{[2(1-y)E_1 + (1+2y)E_2]^2} \\ \frac{\mathbf{E}(y)_{\bar{H}S}^+}{\partial y_e} &= \frac{(E_1 E_1 - E_1 E_2)[(3-2y)E_1 + 2yE_2]}{[(3-2y)E_1 + 2yE_2]^2} - \\ &\frac{2(E_2 - E_1)[yE_1 E_1 + (3-y)E_1 E_2]}{[(3-2y)E_1 + 2yE_2]^2} \end{aligned} \quad (22)$$

根据式(21)和式(22)可得

$$\frac{\partial J}{\partial y_e} = -\frac{1}{2} x_e^p \sum_e^N \mathbf{U}_e^T \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial y_e} \mathbf{U}_e \quad (23)$$

另外, 体积约束的灵敏度可以直接求得。

3 数值算例与讨论

通过两个数值算例证明本文方法可以有效获得体积约束下的功能梯度 Mindlin 板结构拓扑优化设计。优化算例中采用二次 NURBS 基函数, 为避免数值闭锁现象对 Mindlin 板结构等几何分析精度的影响, 采用缩减的两点积分策略。剪切修正系数设置为 $\alpha=5/6$, 材料用量限制比值为 0.5。当连续两次迭代的目标值相对变化小于 0.01 或达到最大迭代次数 50 时, 优化过程终止。算例中材料、几何以及载荷参数选择为量纲为 1 的参数。

3.1 四边固定的方板

第一个算例考虑一个四边固定的矩形方板 ($a \times a = 1 \times 1$), 在板中心处施加一个集中载荷 ($F = 1$), 如图 2 所示。板的厚度为 0.1, 参数设置参考了文献[20], 用红色表示强材料 $E_1 = 4$, 蓝色表示弱材料 $E_2 = 2$, 两种材料泊松比为 0.3。总体积分数设为 0.5, 强材料体积分数占比 V_1 从 0.4 下降到 0.1, 弱材料体积分数占比 V_2 从 0.1 上升到 0.4, J 表示目标函数即柔顺度。将设计域细分为 100×100 的单元时, 优化结果如图 3 所示。

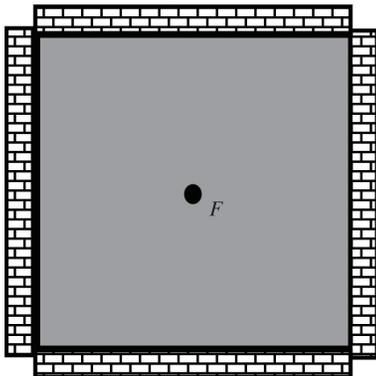
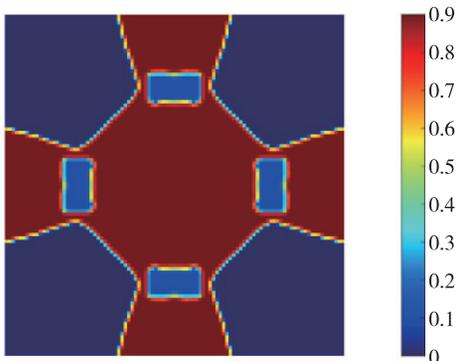
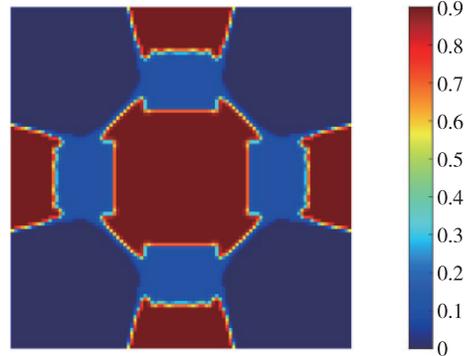


图 2 四边固定的矩形板设计域

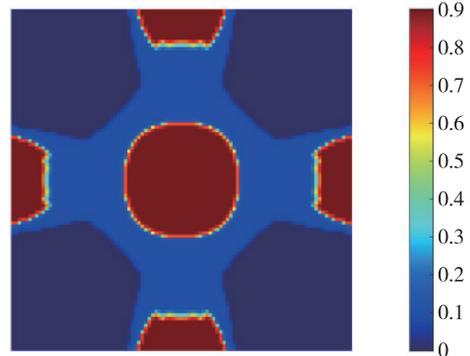
Fig. 2 Rectangular plate design domain with four sides fixed



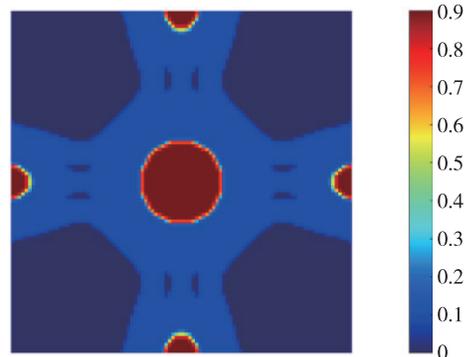
(a) $V_1 = 0.4, V_2 = 0.1, J = 30.52$



(b) $V_1 = 0.3, V_2 = 0.2, J = 32.41$



(c) $V_1 = 0.2, V_2 = 0.3, J = 35.64$



(d) $V_1 = 0.1, V_2 = 0.4, J = 41.52$

图 3 四边固定的功能梯度板拓扑优化结果

Fig. 3 Topology optimization results of the functionally graded plate with four sides fixed

在相同厚度和边界条件下, 可以观察到材料填充面积与体积分数具有明显的相关性, 随着硬质材料 (红色) 的体积分数逐渐下降, 结构的柔顺度逐渐增加。可以推断出, 在对结构刚度贡献较小的地方, 软质材料倾向于替代硬质材料, 而强材料总是分配在中心区域 (集中载荷作用区) 和应力集中区。4 种不同强材料体积分数所对应的优化迭代曲线如图 4 所示。

图 3 中的 4 种优化结果, 拓扑设计构型几乎一致, 不同点在于材料分布, 即强弱材料之间的过渡区域。图 3 右侧颜色栏中的 0.1 和 0.9 对应式 (13)

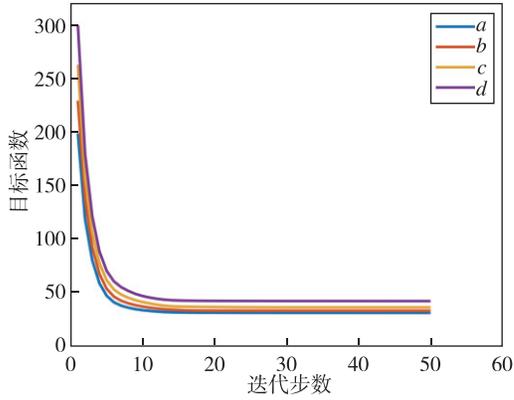


图 4 4 种不同强材料体积分数下的迭代曲线

Fig. 4 Iterative curves of four different strong materials with different volume fractions

设定的 Hashin-Shtrikam 模型上下限。本文协同优化体现在两种设计变量分别控制结构拓扑与材料配比，如图 5 所示。右侧“0”表示结构中的孔洞，即图 5 黑白设计中的白材料。由于图 3 中可视化点的数量有限，功能梯度材料的渐变细节表示得并不是很清楚。由图 4 可知，其收敛速度较快，在 20 多步就已经收敛。在不改变设计优化计算效率的情况下，为了更清楚地显示梯度渐变细节，在图 3 优化结果的基础上，将用于描述最终优化结果的可视化点扩大 100 倍，如图 6 所示，可见优化结果具有清晰的拓扑设计和平滑的材料过渡区域。

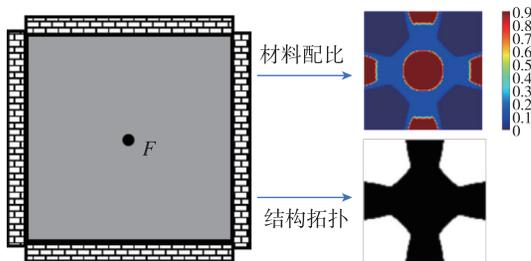
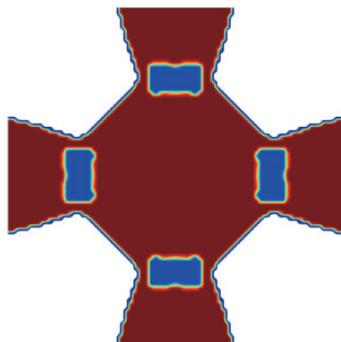
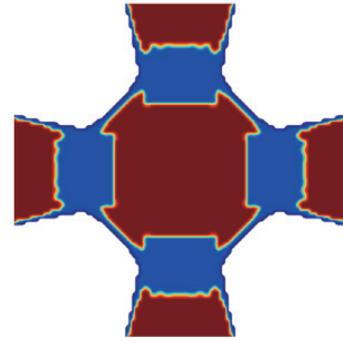


图 5 体积约束下的功能梯度板协同优化设计

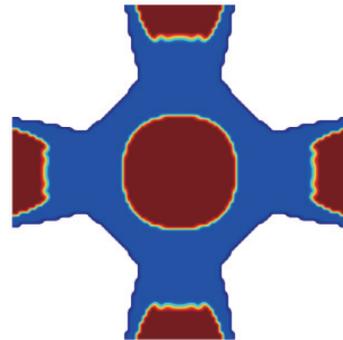
Fig. 5 Collaborative optimization design of the functionally graded plate under volume constraints



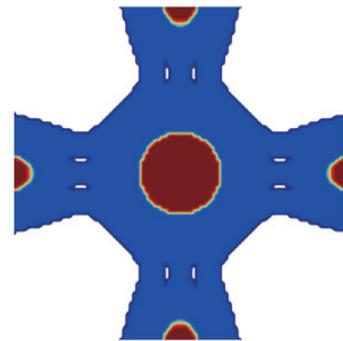
(a) 强材料体积分数为 0.4



(b) 强材料体积分数为 0.3



(c) 强材料体积分数为 0.2



(d) 强材料体积分数为 0.1

图 6 可视化点扩大后的功能梯度板优化结果展示

Fig. 6 Optimization results of the functionally graded plate after enlarging visualization points

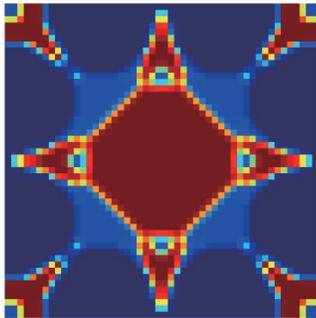
3.2 四边简支的方板

第 2 个算例考虑一个四边简支的矩形板，厚度为 0.01，设计域参考图 2，板的中心仍然施加一个集中载荷。强材料（红色相）的弹性模量 $E_1 = 2$ ，弱材料的弹性模量 $E_2 = 1$ ，两种材料泊松比为 0.3，总体积分数为 0.5，其中强材料占比为 0.3。该算例的设计参考了文献[20]在多材料薄板拓扑优化设计中的算例。将设计域离散为 50×50 的单元，最终的优化结果如图 7 所示，目标函数的迭代曲线如图 8 所示。

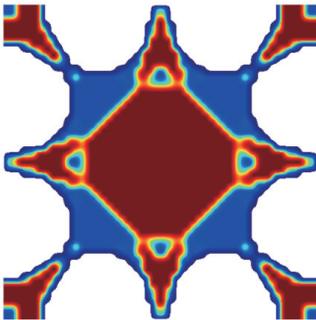
功能梯度结构拓扑优化设计也可以视作一种



(a) 结构拓扑



(b) 材料配比



(c) 最终结果

图7 四边简支的功能梯度板拓扑优化结果

Fig. 7 Topology optimization results of a four-sided simply supported functionally graded plate

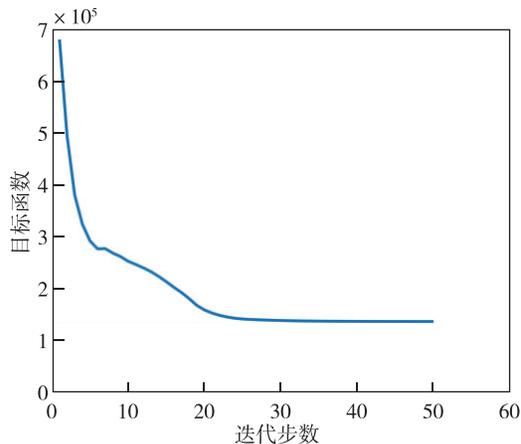


图8 四边简支功能梯度板的迭代曲线

Fig. 8 Iterative curve of a four-sided simply supported functionally graded plate

多材料结构拓扑优化设计,但是传统多材料结构拓扑设计的不同材料相之间存在明显的界面。图7(a)中的优化设计构型与参考文献[20]中单材料结构设计类似,但通过功能梯度材料结构协同设计优化,最终结构的目标函数值为137 319.91,在材料参数设置一致的情况下,结构性能优于参考文献中的双材料板拓扑优化设计,目标函数下降了11.28%,证明了本文设计方案的有效性和优越性。另外,可视化点的数量不依赖建模、分析和设计变量的数量,可以在保证功能梯度材料相之间连续且平滑渐变的同时兼顾设计优化的效率。

4 结束语

本文研究了一种在等几何分析框架下的功能梯度 Mindlin 板结构拓扑优化方法实现材料渐变分布与结构拓扑协同设计。采用基于 NURBS 的建模、分析和设计参数化方法来实现梯度材料结构的一体化优化设计。等几何方法中 NURBS 基函数用于梯度材料分布拓扑优化使得设计结果可以自然避免拓扑优化的常见数值不稳定问题,高阶连续性可以促进材料分布的光滑性以及设计优化的灵敏度分析,因此建立了合理的设计变量与材料分布的关系。数值算例表明,本文方法具有较好的收敛性,在不需要显著增加计算单元和设计参数的情况下能够有效获得具有清晰细节特征的结构拓扑与材料渐变的协同优化设计。通过与已有研究结果对比,本文优化设计方法展现了有效性和优越性。

参考文献

- [1] 王国辉,曾杜娟,刘观日,等. 中国下一代运载火箭结构技术发展方向与关键技术分析[J]. 宇航总体技术, 2021, 5(5): 1-11.
- [2] 仲政,吴林志,陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(5): 528-541.
- [3] Nikbakht S, Kamarian S, Shakeri M. A review on optimization of composite structures Part II: functionally graded materials[J]. Composite Structures, 2019, 214: 83-102.
- [4] Deaton J D, Grandhi R V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014, 49(1): 1-38.
- [5] Zhu J H, Zhang W H, Xia L. Topology optimization in aircraft and aerospace structures design[J]. Arch-

- ives of Computational Methods in Engineering, 2016, 23(4): 595-622.
- [6] Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(6): 1031-1055.
- [7] Xie Y M, Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers & Structures, 1993, 49(5): 885-896.[LinkOut]
- [8] Wang M Y, Wang X M, Guo D M. A level set method for structural topology optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(1/2): 227-246.
- [9] Zhang W S, Yuan J, Zhang J, et al. A new topology optimization approach based on Moving Morphable Components (MMC) and the ersatz material model [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 53(6): 1243-1260.
- [10] 薛日野, 杜宗亮, 郭旭. 基于移动可变形孔洞方法的超弹性结构拓扑优化[J]. 计算力学学报, 2019, 36(4): 441-447.
- [11] Huang X D, Li W B. A new multi-material topology optimization algorithm and selection of candidate materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2021, 386: 114114.
- [12] Liu B S, Huang X D, Cui Y N. Topology optimization of multi-material structures with explicitly graded interfaces [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 398: 115166.
- [13] Sanders E D, Pereira A, Aguiló M A, et al. PolyMat: an efficient Matlab code for multi-material topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018, 58(6): 2727-2759.
- [14] Tavakoli R, Mohseni S M. Alternating active-phase algorithm for multimaterial topology optimization problems: a 115-line MATLAB implementation[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014, 49(4): 621-642.
- [15] Zhang X S, Paulino G H, Ramos A S Jr. Multi-material topology optimization with multiple volume constraints: a general approach applied to ground structures with material nonlinearity[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2018, 57(1): 161-182.
- [16] Munk D J. A bidirectional evolutionary structural optimization algorithm for mass minimization with multiple structural constraints[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2019, 118(2): 93-120.
- [17] 邱克鹏, 张卫红. 功能梯度材料结构拓扑优化设计研究[J]. 西北工业大学学报, 2010, 28(6): 851-857.
- [18] Xia Q, Wang M Y. Simultaneous optimization of the material properties and the topology of functionally graded structures[J]. Computer-Aided Design, 2008, 40(6): 660-675.
- [19] Taheri A H, Suresh K. An isogeometric approach to topology optimization of multi-material and functionally graded structures[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2017, 109(5): 668-696.
- [20] Banh T T, Lee D. Topology optimization of multi-directional variable thickness thin plate with multiple materials[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2019, 59(5): 1503-1520.
- [21] Nguyen M N, Bui T Q. Multi-material gradient-free proportional topology optimization analysis for plates with variable thickness[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2022, 65(3): 1-16.
- [22] Cottrell J A, Hughes T J R, Bazilevs Y. Isogeometric Analysis: toward Integration of CAD and FEA[M]. New York: John Wiley & Sons, 2009.
- [23] Sigmund O. Design of multiphysics actuators using topology optimization-Part II: two-material structures [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(49/50): 6605-6627.
- [24] Qian X P. Topology optimization in B-spline space[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 265: 15-35.
- [25] Svanberg K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, 24(2): 359-373.

引用格式: 刘宏亮, 姚力铭, 王培金. 基于等几何方法的功能梯度 Mindlin 板结构拓扑优化设计[J]. 宇航总体技术, 2023, 7(5): 12-19.

Citation: Liu H L, Yao L M, Wang P J. Topology optimization design of functionally graded mindlin plate structures based on isogeometric method [J]. Astronautical Systems Engineering Technology, 2023, 7(5): 12-19.