

基于等几何分析的板壳结构形状-拓扑协同优化

郝鹏, 张越一, 金灵智, 冯少军, 王博

(大连理工大学工程力学系工业装备结构分析优化与CAE软件全国重点实验室, 大连 116023)

摘要: 板壳结构轻量化设计是工程中的常见问题, 采用有限元法对板壳结构进行拓扑优化时, 难以获得高质量的网格以精准描述几何模型, 且单独使用拓扑优化受制于初始设计空间。提出了一种基于等几何分析的形状-拓扑协同优化方法, 该方法执行先形状优化、后拓扑优化的步骤, 在最佳结构形状的基础上实现最佳材料布局的优化目标。相比于其他组合形式的优化机制, 极大地提高了计算精度与计算效率。采用3个数值算例验证了本方法的有效性与高效性, 结果表明, 与经典等几何拓扑优化方法相比, 可得到更高性能的优化结构, 有助于进一步拓宽结构优化的应用范围。

关键词: 等几何分析; 形状优化; 拓扑优化

中图分类号: V414.19 **文献标志码:** A **文章编号:** 2096-4080 (2023) 05-0001-11

Simultaneous Shape-Topology Optimization of Shell Structures Based on Isogeometric Analysis

HAO Peng, ZHANG Yueyi, JIN Lingzhi, FENG Shaojun, WANG Bo

(Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: The lightweight design of shell structures is a common problem in engineering, using the finite element method to optimize the topology of shell and plate structures is difficult to achieve high-quality mesh to accurately describe the geometric model, and using the topology optimization alone will limit the design space. A simultaneous shape-topology optimization method based on isogeometric analysis is proposed in this paper. The method performs the steps of shape optimization first and topology optimization later, and realizes the optimization goal of the best material layout on the basis of the best structure shape. Compared with other combined forms of optimization mechanisms, the computational accuracy and computational efficiency are greatly improved. Three numerical examples were used to verify the effectiveness and efficiency of the method. The results show that the present method achieves a higher performance optimized structure compared with the classical isogeometric topology optimization method. This will help to further broaden the scope of applications for structural optimization.

Key words: Isogeometric analysis; Shape optimization; Topology optimization

收稿日期: 2023-06-25; 修订日期: 2023-08-22

基金项目: 国家自然科学基金 (11772078)

作者简介: 郝鹏 (1986-), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为结构可靠度、结构力学。

通信作者简介: 冯少军 (1994-), 男, 博士, 助理研究员, 主要研究方向为结构可靠性评估与优化设计。

0 引言

板壳结构在航空航天领域已经获得了广泛关注,其轻质化是提升运载火箭结构系数的重要途径^[1]。在以往研究中,结构轻量化设计一直是一个热门主题,国内外学者进行了大量探索,主要采用有限元方法作为分析手段。然而,对于复杂板壳结构,采用传统有限元方法进行优化是低效的。Hughes等^[2]提出了一种基于样条函数的等几何分析(IGA)方法,采用非均匀有理B样条(NURBS)精确灵活描述几何模型,实现与分析模型之间的无缝集成,分析效率更高。

结构优化是轻量化设计的主要技术手段,包括尺寸优化、形状优化和拓扑优化。本文主要探究形状优化与拓扑优化。在形状优化早期,选取有限元离散化边界节点的坐标作为设计变量^[3]。但这种方法面临着一个难题,即不可避免地会出现边界不规则与非光滑现象。等几何方法具有高精度、精确几何控制、计算机辅助设计(CAD)与计算机辅助工程(CAE)无缝结合等优势。因此,相关学者将其应用于结构形状优化。关键步骤是利用控制点坐标作为设计变量直接描述形状,平滑边界的同时也使分析模型准确代表了结构的几何模型。Qian^[4]提出了一种计算NURBS控制点位置和权重的全解析灵敏度分析方法,将控制点和权系数同时作为设计变量,大幅提升了设计空间。面向加筋薄壁结构的形状优化设计,Hao等^[5]提出了基于等几何的形状优化与筋条布局同步优化框架,该方法具有一定的准确性、灵活性与稳健性。

拓扑优化方法能够在规定的设计区域内使定量材料达到最佳分布形式。但目前大多数拓扑优化方法中的数值分析主要采用有限元法,具有以下限制^[6]:1)有限元网格无法准确描述结构几何,降低了数值精度。2)低阶(C^0)连续性影响了优化结果的准确性。3)高质量有限元网格实现起来较为困难。为了突破上述局限性,Feng等^[7]提出了一种有效的B样条参数化方法,用于壳体结构的筋条布局优化,采用有限元法和固壳耦合法进行分析,得到了清晰布局。随着等几何的发展,有学者提出了基于IGA的拓扑优化方法,Kang等^[8]通过使用NURBS修剪曲线代表孔的方式进行壳结构的等几何拓扑优化工作,得到了光滑连续的材料布局。Gupta等^[9]提出了一种新的使用PHT(Polynomial splines

over Hierarchical T-meshes)样条的自适应等几何拓扑优化方法。如上所述,等几何思想已经在很大程度上用于结构优化。

由以往研究可知,形状优化无法改变拓扑构型,而拓扑优化的初始设计域固定,因此两种方法均存在一定的限制。为此,相关学者相继提出了不同的形状与拓扑组合优化形式。Ansola等^[10]提出了一种形状与拓扑的集成优化方法,执行了连续的两步程序,形状与拓扑交替进行。Hassani等^[11]基于有限元分析对壳体结构同时进行形状和拓扑优化。Zhu等^[12]提出了一种耦合形状与拓扑优化(CSTO)技术用于支撑结构的设计。Jiang等^[13]提出了一种基于移动变形构件(MMC)方法的显示形状与拓扑同时优化方法,最终优化结果可实现与CAD系统的转化。上述研究结果表明,采用一些组合优化形式更能使结构获得良好性能。

基于以上工作,本文提出了一种基于等几何分析的形状与拓扑协同优化方法。采用NURBS精确描述几何模型,提供高平滑度并实现对形状的灵活控制。将控制点坐标定义为形状变量,控制点密度定义为拓扑变量。由于结构形状的改变,需要更加精细的网格进行描述,因此通过等几何分析可避免有限元中重新划分网格的复杂过程。同时,采用3场SIMP方法(固体各向同性材料密度惩罚模型)获取清晰边界并消除中间密度。与经典拓扑优化结果对比,新方法不仅保证了计算效率与计算精度,而且得到了更高性能的优化结构。

1 板壳结构的等几何分析

1.1 NURBS的基本原理

本节主要介绍以B样条为基础的NURBS曲面^[14]。基于B样条基函数可以得到NURBS基函数,NURBS基函数的权重和非均匀节点矢量使其在描述几何形状时更加灵活。对于NURBS曲面,双变量的分段有理基函数可定义为

$$R_{ij,pq}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)\omega_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)\omega_{k,l}} \quad (1)$$

其中, $i=1,2,\dots,n+p+1$; $j=1,2,\dots,m+q+1$, n 和 m 分别是 ξ 方向与 η 方向上基函数的个数, p 和 q 分别为 ξ 方向与 η 方向上基函数的阶次, $N_{i,p}(\xi)$ 和 $N_{j,q}(\eta)$ 分别是 p 阶和 q 阶的单变量B样条基函数, $\omega_{i,j}$ 表示 $N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)$ 的相关权重。则NURBS曲面可定义为

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij, pq}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{i, j}, 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (2)$$

式中, $\mathbf{P}_{i, j}$ 是控制点。

1.2 基于 NURBS 的退化壳单元

在以往的工作中, 已经将基于 NURBS 的退化壳单元用于复杂壳体的等几何静力与屈曲分析^[15]。在退化壳单元中, 任一点的总体坐标可近似地表示为结点坐标的插值形式, 即

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum R_i(\xi, \eta) \left(\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \frac{t_i \zeta}{2} \mathbf{v}_{3i} \right) \quad (3)$$

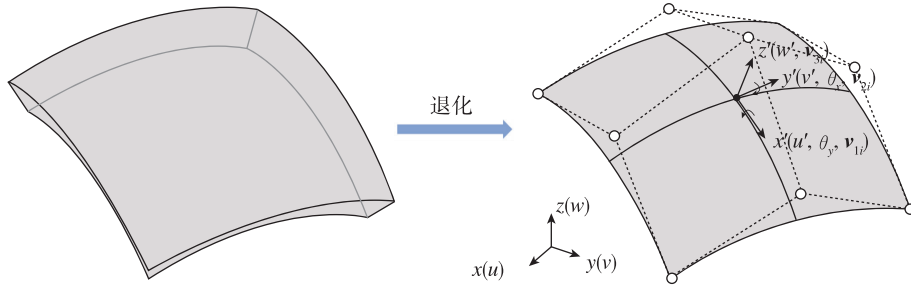


图 1 基于二阶基函数退化壳单元局部坐标系及控制变量

Fig. 1 Local coordinate system and control variables of degenerated shell element based on second order basis function

通过精确的方向矢量, 位移矢量可表示为

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum R_i(\xi, \eta) \left(\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \frac{t_i \zeta}{2} [\mathbf{v}_{1i} \quad -\mathbf{v}_{2i}] \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \right) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{v}_{1i} = [l_{1i} \quad m_{1i} \quad n_{1i}]^T$ 和 $\mathbf{v}_{2i} = [l_{2i} \quad m_{2i} \quad n_{2i}]^T$ 为壳体曲面的局部方向矢量, 定义如下

$$\begin{aligned} \text{if } \mathbf{i} \times \mathbf{v}_{3i} \neq 0, \mathbf{v}_{1i} &= \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{v}_{3i}}{|\mathbf{i} \times \mathbf{v}_{3i}|}, \mathbf{v}_{2i} = \frac{\mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i}}{|\mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i}|} \\ \text{if } \mathbf{i} \times \mathbf{v}_{3i} &= 0, \\ \mathbf{v}_{1i} &= \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{v}_{3i}}{|\mathbf{j} \times \mathbf{v}_{3i}|}, \mathbf{v}_{2i} = \frac{\mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i}}{|\mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i}|} \end{aligned} \quad (5)$$

弹性矩阵的表达式如下

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中, t 为壳体厚度, \mathbf{v}_{3i} 为壳体局部法向矢量, ζ 为高度方向上参数坐标。

根据壳体理论的基本假设, 变形前中面的法线变形后仍保持为直线, 且忽略其长度的变化, 因此壳体内任一点的位移可由中面对应点沿总体坐标 x, y, z 方向的 3 个位移分量 (u_i, v_i, w_i) 及该对应点的法线绕与它相垂直的两个正交矢量的转动 (θ_{xi}, θ_{yi}) 所确定。基于二阶基函数的退化壳单元局部坐标和位移如图 1 所示。

该矩阵取决于材料的杨氏模量 E 和泊松比 ν , k 是考虑剪应力沿厚度方向不均匀分布的影响而引入的修正系数。整理后可得到退化壳的总体刚度阵

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum \mathbf{K}^e \\ &= \sum (\sum \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |J_1| |J_2| \omega_{1i} \omega_{2i} \omega_{3i}) \end{aligned} \quad (7)$$

其中, \mathbf{B} 为局部坐标系下的应力应变矩阵, $\omega_{1i}, \omega_{2i}, \omega_{3i}$ 分别表示 3 个方向上的权系数, $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$ 为雅可比矩阵, \mathbf{J}_1 用于物理空间与参数空间的转换, \mathbf{J}_2 用于参数空间与母空间之间的转换。 \mathbf{J}_1 和 \mathbf{J}_2 分别表示如下

$$\mathbf{J}_1 = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \quad (8)$$

$$\mathbf{J}_2 = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(\xi', \eta', \zeta')} \quad (9)$$

有关退化壳单元刚度阵与雅可比矩阵的详细推导过程可参考文献 [16]。

2 形状-拓扑协同优化

2.1 等几何形状优化

体积约束下, 最小应变能为目标函数的形状优化问题可描述为

$$\begin{cases} \min & C(x_s) = U^T F = U^T K U \\ \text{s. t.} & \frac{V(x_s)}{V_0} = f \\ & K U = F \\ & x_{s \min} \leq x_s \leq x_{s \max} \end{cases} \quad (10)$$

C 为目标函数, U 为结构总位移, F 为载荷, V_0 为结构初始体积, f 为规定体积约束。设计变量为控制点坐标 x_s , $x_{s \min}$ 与 $x_{s \max}$ 分别为自定义的设计变量坐标变化上下限, 用于规定设计域的变化边界, 因此, 采用移动渐近线 (MMA) 算法更新形状变量。

2.1.1 解析灵敏度

目标函数对设计变量的偏导数为

$$\frac{\partial C}{\partial x_s} = -U^T \frac{\partial K}{\partial x_s} U \quad (11)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x_s} = \sum \int \left(\frac{\partial B^T}{\partial x_s} D B |J_1| + B^T D \frac{\partial B}{\partial x_s} \cdot |J_1| + B^T D B \frac{\partial |J_1|}{\partial x_s} \right) |J_2| d\xi d\eta d\zeta \quad (12)$$

其中, 由于矩阵 B 在不同条件下是不断变化的, 因此, $\partial B / \partial x_s$ 的计算是一个繁琐的过程。另外, 可采用半解析法或有限差分法近似计算形状变量灵敏度, 但解析法能得到更准确的灵敏度信息, 关于解析解的推导过程可参考文献 [16]。

2.1.2 多水平模型

采用多水平模型说明等几何形状优化下的灵敏度传递问题, 如图 2 所示, 包括初始模型、分析模型与设计模型。初始模型具有较少控制点, 通过细化增加控制点得到设计模型, 进一步细化得到分析模型满足数值分析精度。设计变量定义在设计模型中, 但目标函数由分析模型求解。在 IGA 的 h 细化过程中, 原控制点被消除并被新控制点取代, 保持结构形状不变的同时确保分析准确性。因此, 可以实现灵敏度从设计模型到分析模型之间的传递。NURBS 曲面的 h 细化过程可参考文献 [16]。

细化结果得到一组新加权控制点 $\{Q_i^w\}$, 常规公式可表示为

$$Q_i^w = \alpha_i P_i^w + (1 - \alpha_i) P_{i-1}^w$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq k - p \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i} & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0 & i \geq k + 1 \end{cases} \quad (13)$$

式中, P_i^w 为原加权控制点, α_i 为比例系数, u_i 为

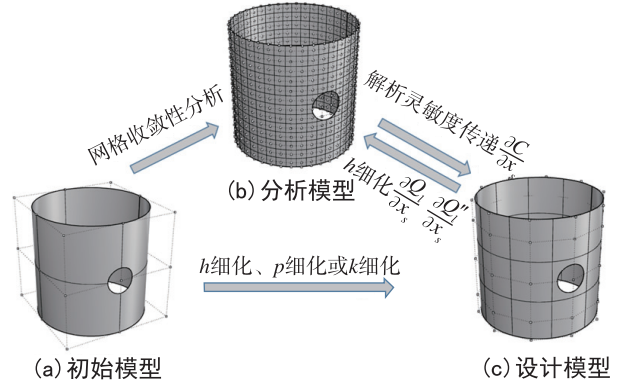


图 2 多水平模型的网格与控制点

Fig. 2 Mesh and control points for multi-level models

原节点, \bar{u} 为插入节点, k 为插入节点位置。相似的, 新的权系数可表示为

$$w_{Q_i} = \alpha_i w_i + (1 - \alpha_i) w_{i-1} \quad (14)$$

新控制点的物理坐标可表示为

$$Q_i = \frac{Q_i^w}{w_{Q_i}} = \frac{\alpha_i P_i^w + (1 - \alpha_i) P_{i-1}^w}{\alpha_i w_i + (1 - \alpha_i) w_{i-1}} \quad (15)$$

在 h 细化的过程中, 只有控制点发生变化。因此, 相对于目标函数的灵敏度传递被转化为控制点坐标的灵敏度传递。相对于设计变量的新控制点灵敏度表示为

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_s} = \frac{\partial Q_i^w / \partial x_s}{w_{Q_i}} = \frac{\alpha_i \partial (P_i^w) / \partial x_s + (1 - \alpha_i) \partial (P_{i-1}^w) / \partial x_s}{\alpha_i w_i + (1 - \alpha_i) w_{i-1}} \quad (16)$$

2.2 等几何拓扑优化

在等几何拓扑优化过程中, 为获得更加清晰且光滑的边界, 消除中间密度, 采用 3 场 SIMP 方法, 即在过滤密度的基础上, 通过投影方式实现过滤密度的清晰化。体积约束下, 最小应变能为目标函数的拓扑优化问题可描述为

$$\begin{cases} \min & C(x_c) = F^T U = U^T K U \\ \text{s. t.} & \frac{V(x_c)}{V_0} = f \\ & K U = F \\ & 0 \leq x_{c \min} \leq x_c \leq 1 \end{cases} \quad (17)$$

设计变量为控制点密度 x_c , 构造增广拉格朗日函数, 柔顺度可表示为

$$C = F^T U + \lambda^T (K U - F) \quad (18)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_c} = (F^T + \lambda^T K) \frac{\partial U}{\partial x_c} + \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial F^T}{\partial x_c} U - \lambda^T \frac{\partial F}{\partial x_c} \right) + \lambda^T \frac{\partial K}{\partial x_c} U$$

定义伴随方程 $\mathbf{F}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{K} = 0$ ，载荷与结构无关时 $\partial \mathbf{F} / \partial x_c = 0$ ，同时考虑刚度阵的对称性 $\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{F}$ 。由 $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ 可知 $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{U}$ ，故灵敏度可表示为

$$\frac{\partial C}{\partial x_c} = -\mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_c} \mathbf{U} \quad (20)$$

其中， $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_c} = \sum (p \bar{x}_c^{p-1} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{\partial \bar{x}_c}{\partial \widetilde{x}_{ci}} \frac{\partial \widetilde{x}_{ci}}{\partial \widetilde{x}_{ci}})$ ， p 为惩罚因子。

密度过滤的表达式如下

$$\widetilde{x}_{ce} = \frac{1}{\sum H_{ei}} \sum H_{ei} x_{ci} \quad (21)$$

$$x_c^{k+1} = \begin{cases} \max(x_c^{\min}, x_c - m) & , & (\widetilde{x}_c) x_c B_c^? \leq \max(x_c^{\min}, x_c - m) \\ (\widetilde{x}_c) x_c B_c^? & , & \max(x_c^{\min}, x_c - m) < (\widetilde{x}_c) x_c B_c^? < \min(1, x_c + m) \\ \min(1, x_c + m) & , & \min(1, x_c + m) \leq (\widetilde{x}_c) x_c B_c^? \end{cases} \quad (24)$$

其中， $B_c = -\frac{\partial C}{\partial x_c} / \bar{\lambda} \frac{\partial V}{\partial x_c}$ ，拉格朗日乘子 $\bar{\lambda}$ 通常采用二分法搜索得到，直至满足设定的体积比约束。

2.3 等几何形状-拓扑协同优化

基于等几何分析的形状-拓扑协同优化流程图如图 3 所示。采用一种先等几何形状优化，后等几何拓扑优化的协同优化方法，对求得的最佳结构形状进行拓扑优化，求解新结构在体积约束下的最小应变能。

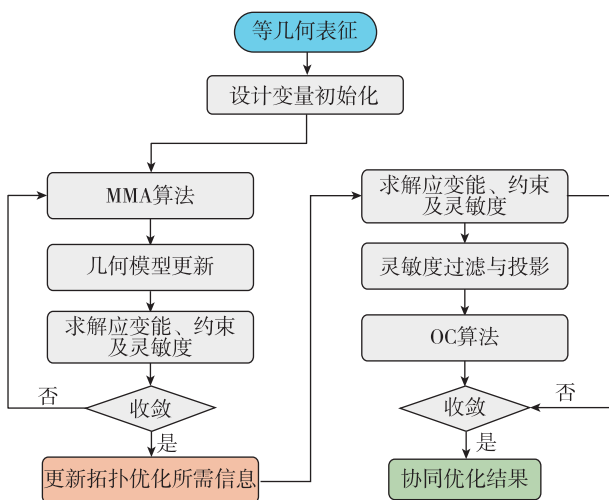


图 3 基于等几何分析的形状-拓扑协同优化流程图

Fig. 3 Flow chart for simultaneous shape-topology optimization based on isogeometric analysis

其中，

$$H_{ei} = \max\{r_{\min} - \Delta(e, i), 0\} \quad (22)$$

式中， r_{\min} 为过滤半径， $\Delta(e, i)$ 为两控制点之间的距离。

为了消除过滤带来的灰度单元，之后通过投影实现清晰的优化构型。本文采用正切型 Heaviside 函数，表达式如下

$$\bar{x}_c = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\bar{x}_c - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \quad (23)$$

其中， η 为投影阈值， β 控制着函数在 η 附近的陡峭程度。

采用优化准则法 (OC) 进行迭代求解，设计变量的迭代更新表达式为

3 算例

在本章中，通过 3 个数值实例验证所提出的方法。第 1 个是拓扑优化中的常用测试算例，即平面 MBB 梁问题。第 2 和第 3 个例子是具有不同类型载荷条件的曲面问题，以此来验证所提出框架对复杂曲面的适用性。所有 NURBS 模型均采用 3 阶，模型参数均是量纲为 1，材料属性如下：弹性模量 $E=1$ ，泊松比 $\nu=0.3$ 。壳体结构的厚度为 1，过滤半径为 2，Heaviside 函数中 $\beta=2$ ， $\eta=0.5$ 。目标函数为最小应变能，约束函数为使目标体积小于或等于初始体积与体分比的乘积。为了验证形状-拓扑协同优化框架在结构轻量化设计方面的高效性，3 个算例均与经典等几何拓扑优化结果进行对比。

3.1 MBB 梁

首先考虑 MBB 梁，边界与载荷条件如图 4 所示，边长分别为 600 与 100，模型的初始体积为 60 000。形状优化方面：考虑对称性，选取初始模型的 1/2 为设计域，取其左侧 4 个控制点的 y 向坐标作为形状变量，其中上边界的 1, 2 号控制点的 y 向坐标改变量上下限是 $[-50, 50]$ (初始 y 向坐标为 50，则坐标范围是 $[0, 100]$)；下边界 3, 4 号控制点的 y 向坐标改变量的范围是 $[-230, -50]$ (初始 y 向坐标为 -50 ，则坐标范围是

$[-100, -280]$); 形状优化体积约束为整体体积的 2.0 倍。拓扑优化方面: 分析模型的控制点为 100×25 , 每个控制点的密度设置为设计变量, 拓扑优化体积约束为整体体积的 0.25 倍。因此, 形状-拓扑协同优化的总体约束为初始体积的 0.5 倍。作为对比算例, 在经典等几何拓扑优化方法中, 保持与形状-拓扑协同优化相同的体积约束, 总体积的约束值是初始体积的一半。

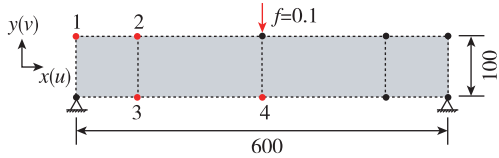
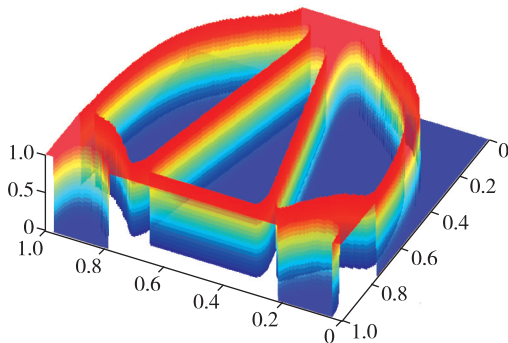


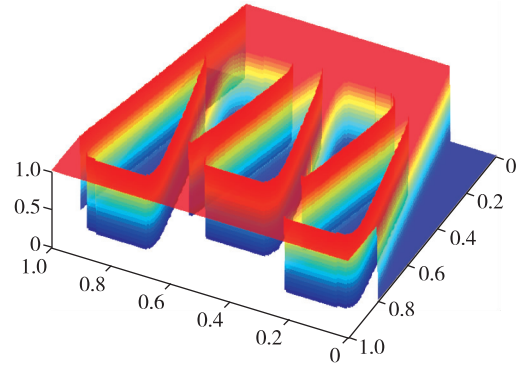
图 4 集中载荷作用下的 MBB 梁

Fig. 4 MBB beam under concentrated loading

所提方法与经典等几何拓扑优化方法下参数域内的密度分布函数 (Density Distribution Function, DDF) 图在图 5 中给出, 可初步观察到结构构型的变化, 所提方法下的结构杆件个数明显减少。迭代曲线及优化过程中的一些中间设计如图 6 所示。从形状优化的迭代进程中可知, 结构设计域向下演化, 整体框架逐渐加宽, 收敛速度快, 稳定性强。结构的体积与应变能均在前 4 步内急剧变化, 在第 19 步达到最佳形状。在拓扑优化结果中, 应变能在前 10 步内明显减少, 之后细微调整直至收敛, 最终为桁架状结构。对于类似结构, Rong 等^[17]使用不同方法获得的优化结果如图 7 所示, 该方法通过增减子域的方式来重塑设计域, 之后在自适应设计域中执行拓扑优化。由图 7 可知, 所提方法得到了相似的构型。两种方法下使用的单元类型不一致, 因此无法直接比较目标函数值。但值得注意的是, Rong 等方法下的设计变量个数为 98, 优化周期较长, 而提出方法的设计变量个



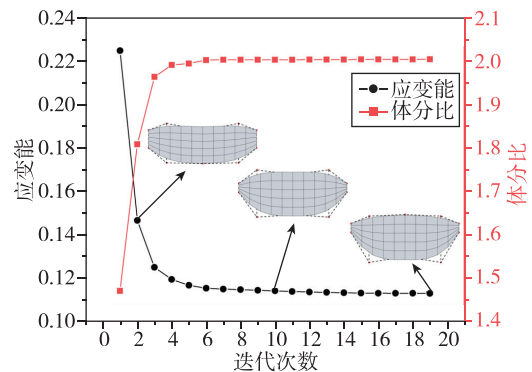
(a) 等几何形状-拓扑协同优化方法



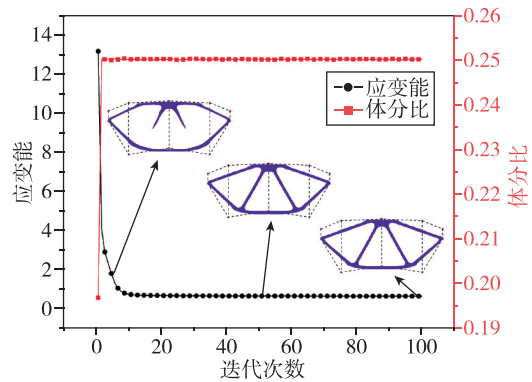
(b) 经典等几何拓扑优化方法

图 5 两种方法下的 MBB 梁的密度分布函数

Fig. 5 Density distribution function of MBB beam under two methods



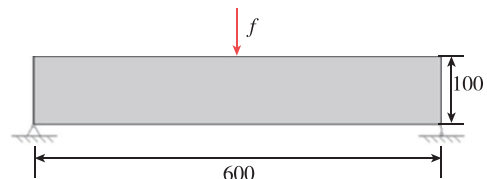
(a) 形状优化结果 $C=0.1128$



(b) 拓扑优化结果 $C=0.6009$

图 6 MBB 梁的等几何形状-拓扑协同优化结果

Fig. 6 Results of MBB beam by isogeometric simultaneous shape-topology optimization method



(a) MBB 梁载荷与边界条件

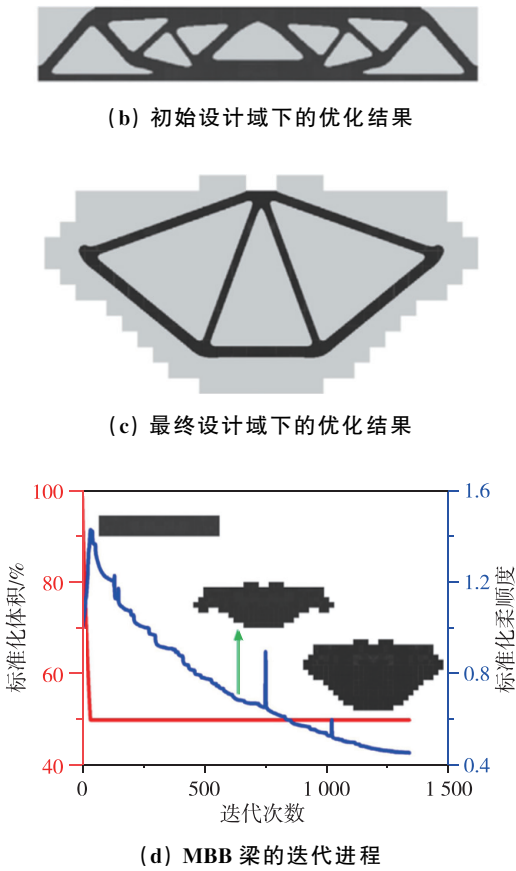


图 7 Rong 等获得的 MBB 梁优化结果
Fig. 7 The MBB beam optimization results obtained by Rong et al.

数为 4，优化迭代次数较少，只采用了极少的形状变量，且收敛速度快，稳定性强。

经典等几何拓扑优化方法下的迭代曲线与中间设计如图 8 所示。与图 6 协同优化方法下的优化结果对比发现，在体积基本相同的条件下，应变能相对减小了 45.89%，得到了更高性能的结构，

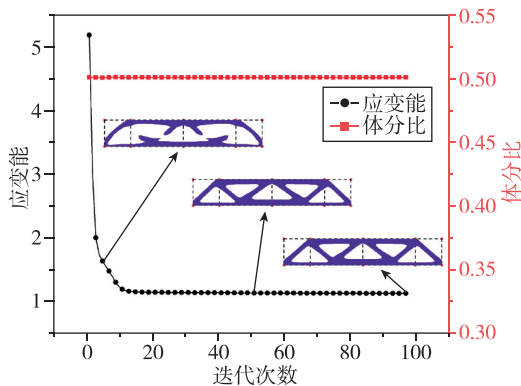


图 8 MBB 梁的经典等几何拓扑优化结果 $C=1.1106$
Fig. 8 Results of MBB beam by classical isogeometry topology optimization method $C=1.1106$

验证了该方法的高效性。为了更清晰地展示结构形状变化，所提方法下优化前后的控制点 y 向坐标见表 1。可明显地观察到控制点变化的对称性，下边界大幅度下移，结构整体加宽。

表 1 MBB 梁优化前后控制点坐标
Tab. 1 Coordinates of control points before and after MBB beam optimization

坐标	上边界		下边界	
	初始	结果	初始	结果
y	50.00	0	-50.00	-50.00
	50.00	40.66	-50.00	-216.71
	50.00	50.00	-50.00	-185.23
	50.00	40.66	-50.00	-216.71
	50.00	0	-50.00	-50.00

3.2 集中载荷下的自由曲面

中心点受集中载荷的自由曲面问题如图 9 所示，其投影边长为 200，初始体积为 40 720，4 个端点固支。形状优化方面：根据对称性，选取初始模型的 1/8 作为设计域，取 3 个坐标方向为形状变量，1 号控制点的 z 向坐标，改变量范围是 $[-50, 50]$ ，2 号控制点的 z 向坐标与 x 向坐标（根据对称性，正交方向上的形状变量则为 y 向坐标），改变量范围均是 $[-30, 30]$ ，形状优化体积约束为整体体积的 1 倍。拓扑优化方面：分析模型的控制点为 60×60 ，每个控制点的密度设置为设计变量，拓扑优化体积约束为整体体积的 3/10。因此，形状-拓扑协同优化的总体约束为初始体积的 3/10。作为对比算例，在经典等几何拓扑优化方法中，保持与形状-拓扑协同优化相同的体积约束，总体积的约束值是初始体积的 3/10。

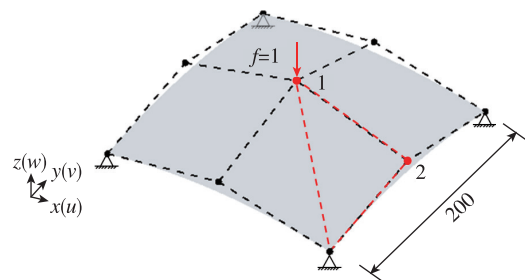
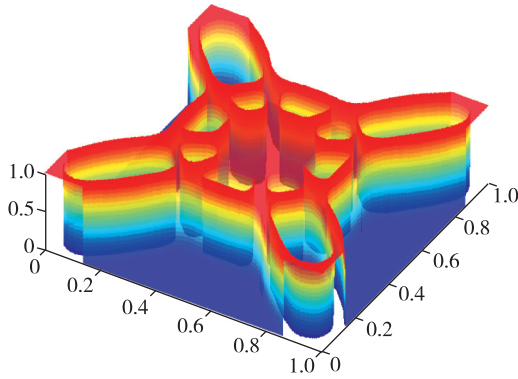


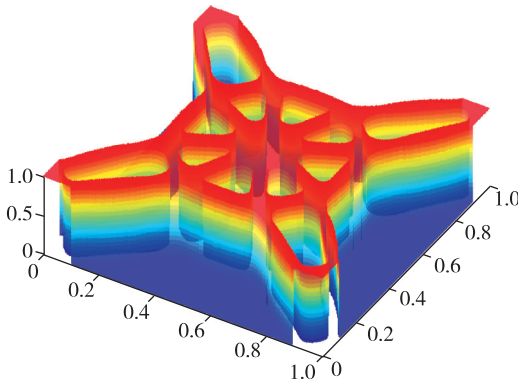
图 9 集中载荷作用下的自由曲面
Fig. 9 Free-form shell under concentrated loading

如图 10 所示，分别得到两种优化方法下参数域内的 DDF 图，可见二者结构形状差别不大。形

状-拓扑协同优化结果如图 11 所示，形状优化方面：中心控制点 z 向坐标增大，结构具有更大翘曲度，体分比存在振荡，但并未达到目标约束，这说明获得最佳结构形状时所需材料并不多。拓扑优化方面：应变能与体分比均迅速达到稳定状态，结构中心开孔数量逐渐增多且清晰。

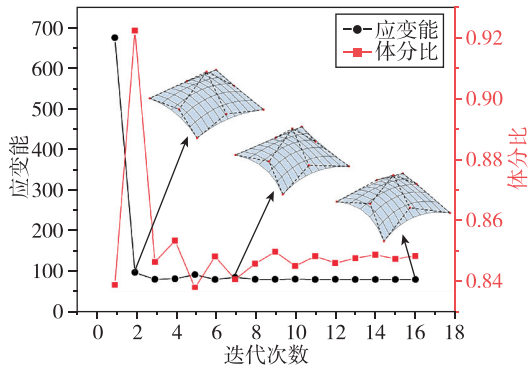


(a) 等几何形状-拓扑协同优化方法

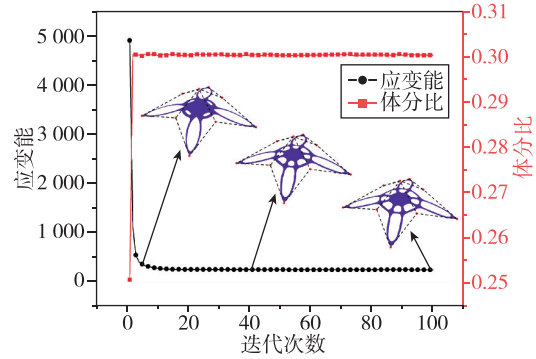


(b) 经典等几何拓扑优化方法

图 10 两种方法下的自由曲面的密度分布函数
Fig. 10 Density distribution function of free-form shell under two methods



(a) 形状优化结果 $C=77.5736$



(b) 拓扑优化结果 $C=217.0887$

图 11 自由曲面的等几何形状-拓扑协同优化结果
Fig. 11 Results of free-form shell by isogeometric simultaneous shape-topology optimization method

经典等几何拓扑优化结果如图 12 所示，对比两组优化结果发现，形状-拓扑协同优化方法的最终优化结构具有更大的弯曲程度。虽然形状优化中结构体积并未达到目标约束，但应变能相对减少了 71.80%，节省材料的同时结构性能进一步提高。形状-拓扑协同优化方法下优化前后的控制点坐标见表 2。由表 2

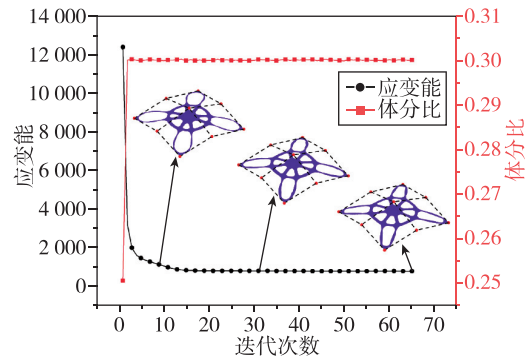


图 12 自由曲面的经典等几何拓扑优化结果 $C=769.9084$

Fig. 12 Results of free-form shell by classical isogeometry topology optimization method $C=769.9084$

表 2 自由曲面优化前后控制点坐标

Tab. 2 Coordinates of control points before and after free-form optimization

坐标	初始	结果
下边界		
x	-100 0 100	-100 0 100
y	-100 -100 -100	-100 -70 -100
z	0 20 0	0 42.1 0
中线		
x	-100 0 100	-70 0 70
y	0 0 0	0 0 0
z	20 50 20	42.1 100 42.1
上边界		
x	-100 0 100	-100 0 100
y	100 100 100	70 100
z	0 20 0	0 42.1 0

可知，中心控制点 z 向坐标已达到最大值，四边中点坐标向内向上移动，结构翘曲度增大。

3.3 均布载荷下的半圆柱壳

最后考虑半圆柱壳问题，模型尺寸与边界条件在图 13 中给出，其直径为 6，高度为 12，初始体积为 113，方向向下的均布载荷作用在高度方向边界上，4 个端点固支。形状优化方面：考虑对称性，选取初始模型的 1/4 作为设计域，取其 6 个控制点的法向坐标作为形状变量，其坐标改变量的上下限均为 $[-2, 2]$ ；形状优化体积约束为整体体积的 1.3 倍。拓扑优化方面：分析模型的控制点为 60×84 ，每个控制点的密度设置为设计变量，拓扑优化体积约束为整体体积的 3/10。因此，形状-拓扑协同优化的总体约束为初始体积的 39/100。作为对比算例，在经典等几何拓扑优化方法中，保持与形状-拓扑协同优化相同的体积约束，总体积的约束值是初始体积的 39/100。

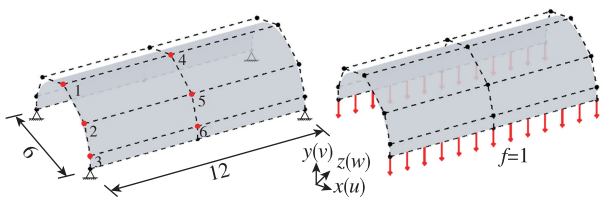
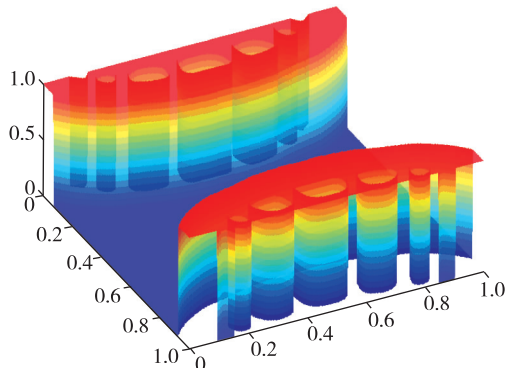
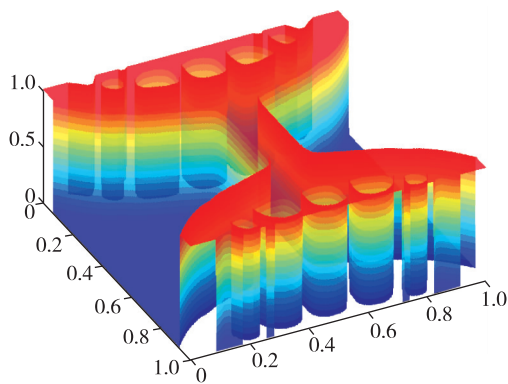


图 13 均布载荷作用下的半圆柱壳
Fig. 13 Half cylindrical shell under uniform loading

所提出方法与经典等几何拓扑优化方法下参数域内的 DDF 图在图 14 中给出，各自的迭代曲线与一些中间结构分别如图 15 与图 16 所示。从形状-拓扑协同优化结果中可知，形状优化方面：设计域改变的初始阶段存在振荡，之后迅速收敛，结构整体沿控制点法向方向外扩，由圆弧形变为“门”字形。拓扑优化方面：随着迭代进程的推

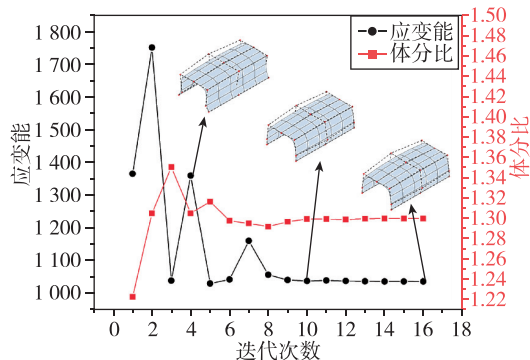


(a) 等几何形状-拓扑协同优化方法

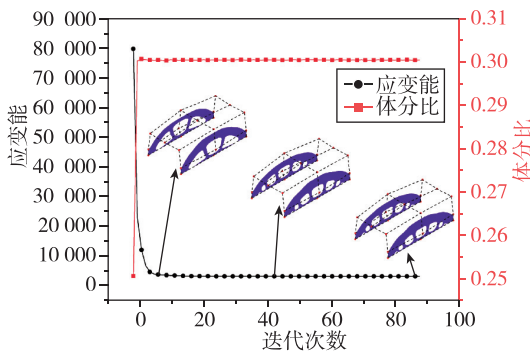


(b) 经典等几何拓扑优化方法

图 14 两种方法下的半圆柱壳的密度分布函数
Fig. 14 Density distribution function of half cylindrical shell under two methods



(a) 形状优化结果 $C=1\ 037.260\ 2$



(b) 拓扑优化结果 $C=3\ 035.967\ 4$

图 15 半圆柱壳的等几何形状-拓扑协同优化结果
Fig. 15 Results of half cylindrical shell by isogeometric simultaneous shape-topology optimization method

进，两侧弧形结构开孔个数增加。与经典等几何拓扑优化结果对比可发现，结构没有中间连接部分，且两侧弧形开孔结构的倾斜角度减小。同时，对比两种方法下的最终目标函数值可知，在体积基本相同的条件下，等几何形状-拓扑协同优化方法下的应

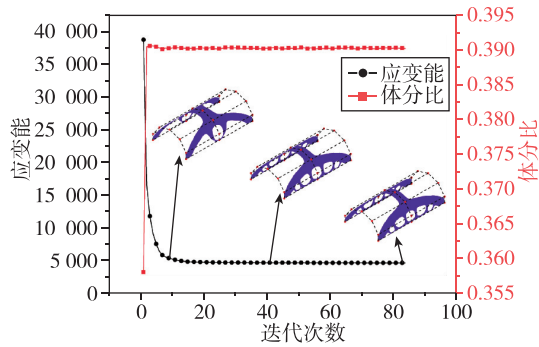


图 16 半圆柱壳的经典等几何拓扑优化结果 $C=4\ 456.149\ 7$

Fig. 16 Results of half cylindrical shell by classical isogeometry topology optimization method

变能相对减小 31.87%，提高了优化效率。

为了更清晰地观察结构形状变化，形状-拓扑协同优化方法下优化前后的控制点坐标在表 3 中给出。根据对称性可知，上下边界中控制点的 x 向、 y 向坐标变化一致，中线控制点的变动较大，结构整体弧度减小，最终演化为“门”形结构。

表 3 半圆柱壳优化前后控制点坐标

Tab. 3 Coordinates of control points before and after half-cylinder shell optimization

坐标	初始			结果		
	x	y	z	x	y	z
下边界	3	0	0	3	0	0
	2.99	0.97	0	2.99	0.97	0
	1.85	2.55	0	2.65	3.64	0
	0	3.15	0	0	3.53	0
	-1.85	2.55	0	-2.65	3.64	0
	-2.99	0.97	0	-2.99	0.97	0
	-3	0	0	-3	0	0
中线	3	0	6	3	0	6
	2.99	0.97	6	3.40	1.11	6
	1.85	2.55	6	3.03	4.16	6
	0	3.15	6	0	4.03	6
	-1.85	2.55	6	-3.03	4.16	6
	-2.99	0.97	6	-3.40	1.11	6
	-3	0	6	-3	0	6
上边界	3	0	12	3	0	12
	2.99	0.97	12	2.99	0.97	12
	1.85	2.55	12	2.65	3.64	12
	0	3.15	12	0	3.53	12
	-1.85	2.55	12	-2.65	3.64	12
	-2.99	0.97	12	-2.99	0.97	12
	-3	0	12	-3	0	12

4 结束语

本文提出了基于等几何分析的壳体结构形状-拓扑协同优化框架，可以找到板壳结构的最佳结构形状与最佳材料布局。在该过程中，等几何形状优化方面，推导了解析灵敏度公式，采用多水平模型说明了形状变化过程中的灵敏度传递问题；等几何拓扑优化方面，推导了灵敏度公式，考虑了过滤与投影以防止出现棋盘格与网格依赖性问题。最后，在 MBB 梁的经典算例中，与前人不同组合优化方法以及与经典等几何拓扑优化方法相比，所提出方法可以实现具有改进性能的优化解决方案；之后在受集中载荷自由曲面与受均布载荷半圆柱壳的数值算例中，通过与经典等几何拓扑优化方法下的结果进行对比，验证了所提出方法的有效性与高效性。

参考文献

- [1] 王国辉, 曾杜娟, 刘观日, 等. 中国下一代运载火箭结构技术发展方向与关键技术分析[J]. 宇航总体技术, 2021, 5(5): 1-11.
- [2] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194 (39/40/41): 4135-4195.
- [3] Braibant V, Fleury C, Beckers P. Shape optimal design-an approach matching CAD and optimization concepts [C]. Proceedings of the IFIP WG 5.2 Working Conference on Optimization in Computer-Aided Design, Elsevier North Holland, Amsterdam, Netherlands, 1985.
- [4] Qian X P. Full analytical sensitivities in NURBS based isogeometric shape optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(29/30/31/32): 2059-2071.
- [5] Hao P, Wang Y, Jin L Z, et al. An isogeometric design-analysis-optimization workflow of stiffened thin-walled structures via multilevel NURBS-based free-form deformations (MNFFD)[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 408: 115936.
- [6] Gao J E, Gao L A, Luo Z, et al. Isogeometric topology optimization for continuum structures using density distribution function[J]. International Journal for Numerical

- Methods in Engineering, 2019, 119(10): 991-1017.
- [7] Feng S Q, Zhang W H, Meng L, et al. Stiffener layout optimization of shell structures with B-spline parameterization method[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 63(6): 2637-2651.
- [8] Kang P, Youn S K. Isogeometric topology optimization of shell structures using trimmed NURBS surfaces[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2016, 120: 18-40.
- [9] Gupta A, Mamindlapelly B, Karuthedath P L, et al. Adaptive isogeometric topology optimization using PHT splines[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 395: 114993.
- [10] Ansola R, Canales J, Tárrago J A, et al. An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures [J]. Computers & Structures, 2002, 80(5/6): 449-458.
- [11] Hassani B, Tavakkoli S M, Ghasemnejad H. Simultaneous shape and topology optimization of shell structures[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013, 48(1): 221-233.
- [12] Zhu J H, Zhang W H, Beckers P, et al. Simultaneous design of components layout and supporting structures using coupled shape and topology optimization technique [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2008, 36(1): 29-41.
- [13] Jiang X D, Zhang W S, Liu C, et al. An explicit approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures [J]. Applied Mathematical Modelling, 2023, 113: 613-639.
- [14] Piegl L A, Tiller W. The NURBS book [M]. Springer Science & Business Media, 1996.
- [15] Hao P, Wang Y, Tang H, et al. A NURBS-based degenerated stiffener element for isogeometric static and buckling analysis[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 398: 115245.
- [16] Hao P, Wang Y, Wu Z M, et al. Progressive optimization of complex shells with cutouts using a smart design domain method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2020, 362: 112814.
- [17] Rong Y, Zhao Z L, Feng X Q, et al. Structural topology optimization with an adaptive design domain [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 389: 114382.

引用格式:郝鹏,张越一,金灵智,等.基于等几何分析的板壳结构形状-拓扑协同优化[J].宇航总体技术,2023,7(5):1-11.

Citation: Hao P, Zhang Y Y, Jin L Z, et al. Simultaneous shape-topology optimization of shell structures based on isogeometric analysis [J]. Astronautical Systems Engineering Technology, 2023,7(5):1-11.