

点目标假设下的二维精度体系研究

王智, 王鹏, 何磊, 白文露, 夏川

(北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

摘要: 点目标假设下, 在二维圆概率偏差线性公式的基础上, 给出了基于纵横向均方根误差分段的精确公式。同时应用概率论正态分布理论, 对二维情况下均方根误差、圆概率偏差和概率偏差的相互关系进行了研究, 通过理论推导和数值计算给出了二维精度指标相互转换的拟合公式, 完善了满足工程应用的二维精度体系。研究结果可在精度指标的论证、设计和考核中使用。

关键词: 点目标; 精度体系; 关系研究

中图分类号: V412

文献标志码: A

文章编号: 2096-4080 (2023) 03-0015-04

Research on Two-Dimensional Dispersion Index System Under the Point Target Hypothesis

WANG Zhi, WANG Peng, HE Lei, BAI Wenlu, XIA Chuan

(Beijing Institute of Aeronautical Systems Engineering, Beijing 100076, China)

Abstract: On the basis of the linear formula of the two-dimensional circular error probable under the hypothesis of the point target, an accurate formula based on the segmentation of root mean square error in both longitudinal and lateral directions was given. The relationship of root mean square error, circular error probable, probable deviation was researched by applying distribution theory of normal dispersion function of probability theory, a fitting formula for the conversion of two-dimensional accuracy indicators was provided through theoretical derivation and numerical calculation, and the dispersion index system approaching to the requirements of actual engineering application was consummated. This research can instruct the demonstration, designing and checking on dispersion index.

Key words: Point target; Dispersion index; Relationship research

0 引言

飞行器落点散布由一系列彼此独立的随机干扰因素引起。虽无法事先确定每种干扰因素的具体数值, 但其均符合一定的统计特性。按照概率论中心极限定理^[1-3]: 对于大量随机变量之和, 如果每个随机变量对总和的作用是微小的, 且彼此不相关, 则此和式近似于正态分布。因此, 可以

认为落点偏差的概率分布遵循正态分布规律。

在点目标假设下, 表征飞行器二维精度的常用指标是均方根误差和圆概率偏差。在不同的应用场景, 二维精度指标需用概率偏差表示。

本文在点目标的假设下, 应用概率论正态分布理论, 在二维圆概率偏差线性公式的基础上, 给出了基于纵横向均方根误差分段的圆概率偏差精确公式, 同时对二维精度指标体系及相互转换

收稿日期: 2022-10-11; 修订日期: 2023-04-03

基金项目: 国家自然科学基金 (11372054)

作者简介: 王智 (1985-), 男, 硕士, 高级工程师, 主要研究方向为飞行器总体设计。E-mail: yhzts@163.com

关系进行了研究。

1 落点散布坐标系

要描述飞行器落点 C 围绕目标点 T 的分布，须要明确落点偏差量的表示方法，规定落点散布平面为目标点 T 处的水平面，以 T 为原点 O_c ，用发射点 O 矢径 r_o 与目标点 T 矢径 r_t 所组成的平面与散布平面的截线顺飞行方向为 ΔL 轴，即纵向，从 O 点指向 T 点的方向为正；在散布平面内与 T 点相垂直的方向为 ΔH 轴，即横向，指向 ΔL 轴右方为正。飞行器落点 C 在落点散布坐标系 $O_c - \Delta L \Delta H$ 中的 ΔL ， ΔH 即为纵向落点偏差和横向落点偏差，如图 1 所示。

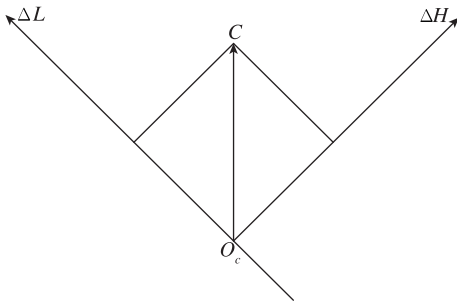


图 1 落点散布坐标系示意图

Fig. 1 Schematic diagram of falling point dispersion coordinate system

2 二维精度指标体系及相互关系

2.1 均方根误差

若瞄准点为目标中心，则其纵向 ΔL 、横向 ΔH 分布规律的二维正态分布为

$$f(\Delta L, \Delta H) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Delta L}\sigma_{\Delta H}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-[a(b+c+d)]} \quad (1)$$

$$a = \frac{1}{2(1-\rho^2)}$$

$$b = \left(\frac{\Delta L - \mu_{\Delta L}}{\sigma_{\Delta L}}\right)^2$$

$$c = -2\rho \left[\frac{(\Delta L - \mu_{\Delta L})(\Delta H - \mu_{\Delta H})}{\sigma_{\Delta L}\sigma_{\Delta H}}\right]$$

$$d = \left(\frac{\Delta H - \mu_{\Delta H}}{\sigma_{\Delta H}}\right)^2$$

式中， $\mu_{\Delta L}$ ， $\mu_{\Delta H}$ 为系统性偏差； $\sigma_{\Delta L}$ ， $\sigma_{\Delta H}$ 为随机误差和均方根误差； ρ 为纵横向相关系数， $0 \leq \rho < 1$ 。

考虑没有系统性误差，即 $\mu_{\Delta L} = \mu_{\Delta H} = 0$ ，并且纵横向独立，则 $(\Delta L, \Delta H)$ 的密度函数分别为

$$f(\Delta L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Delta L}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta L}{\sigma_{\Delta L}}\right)^2\right] \quad (2)$$

$$f(\Delta H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\Delta H}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta H}{\sigma_{\Delta H}}\right)^2\right] \quad (3)$$

假定 $\sigma_{\Delta L} = \sigma_{\Delta H} = \sigma$ ，即落点为圆散布，此时有

$$f(\Delta L, \Delta H) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\Delta L^2 + \Delta H^2)\right] \quad (4)$$

ΔL 和 ΔH 的联合概率密度函数分布如图 2 所示。

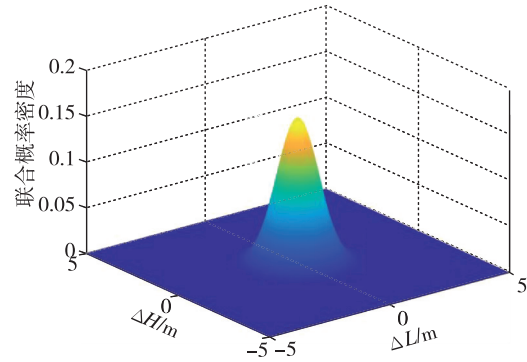


图 2 联合概率密度图

Fig. 2 Joint probability density

2.2 概率偏差

随机变量 ΔL ， ΔH 的概率偏差 $B_{\Delta L}$ ， $B_{\Delta H}$ 也称为公算偏差。公算偏差 $B_{\Delta L}$ ， $B_{\Delta H}$ 对称于散布中心，落点出现于其中的概率等于 0.5 区间长度的一半，即

$$P\{|\Delta L| < B_{\Delta L}\} = 0.5 \quad (5)$$

$$P\{|\Delta H| < B_{\Delta H}\} = 0.5 \quad (6)$$

根据拉普拉斯函数

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (7)$$

则有

$$\Phi\left(\frac{B_{\Delta L}}{\sigma_{\Delta L}}\right) = 1 - \left(\frac{1-0.5}{2}\right) = 0.75 \quad (8)$$

$$\Phi\left(\frac{B_{\Delta H}}{\sigma_{\Delta H}}\right) = 1 - \left(\frac{1-0.5}{2}\right) = 0.75 \quad (9)$$

由拉普拉斯表可知^[4]

$$\Phi\left(\frac{B_{\Delta L}}{\sigma_{\Delta L}}\right) = 0.75 \Rightarrow B_{\Delta L} = 0.6745\sigma_{\Delta L} \quad (10)$$

$$\Phi\left(\frac{B_{\Delta H}}{\sigma_{\Delta H}}\right) = 0.75 \Rightarrow B_{\Delta H} = 0.6745\sigma_{\Delta H} \quad (11)$$

2.3 圆概率偏差

圆概率偏差 (Circular Error Probable, CEP) 是以散布中心为圆心，以 R 为半径画圆，飞行器落在

该圆内的概率为 50%，此 R 亦称为半数必中圆半径。

满足下式的 R 即为 CEP

$$P = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Delta L}\sigma_{\Delta H}\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{\Delta L^2+\Delta H^2 \leq R^2} e^{-[a(b+c+d)]} d\Delta L d\Delta H = 0.5 \quad (12)$$

在点目标假设的条件下，以瞄准点为圆心，假设落点偏差服从正态分布且纵横向独立，即 $\rho = 0$ ，则 CEP 可表示为^[5-8]

$$P = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Delta L}\sigma_{\Delta H}} \iint_{\Delta L^2+\Delta H^2 \leq R^2} e^{-\frac{1}{2}(b+d)} d\Delta L d\Delta H = 0.5 \quad (13)$$

2.4 指标体系相互关系

当落点散布具有圆散布特性，即

$$\begin{cases} \sigma_{\Delta L} = \sigma_{\Delta H} = \sigma \\ B_{\Delta L} = B_{\Delta H} = B \end{cases} \quad (14)$$

则有^[9]

$$P = 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{CEP}{\sigma}\right)^2} = 0.5 \quad (15)$$

进而有

$$CEP = 1.1774\sigma = 1.7456B \quad (16)$$

式 (16) 为圆散布情况下圆概率偏差 CEP、均方根误差 σ 和概率偏差 B 之间的相互转化关系。

在满足一定计算精度的情况下，为快速计算 CEP，可建立 CEP 的拟合公式^[10-11]。通过数值计算确定 CEP 与 $\sigma_{\Delta L}$ 、 $\sigma_{\Delta H}$ 的拟合关系如下

$$CEP = \begin{cases} \sigma_{\max} \left[0.919 \left(\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right)^2 - 0.028 \left(\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right) + 0.675 \right] & \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \leq 0.3 \\ 0.562\sigma_{\max} + 0.615\sigma_{\min} & \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} > 0.3 \end{cases} \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} \sigma_{\min} &= \min(\sigma_{\Delta L}, \sigma_{\Delta H}) \\ \sigma_{\max} &= \max(\sigma_{\Delta L}, \sigma_{\Delta H}) \end{aligned} \quad (18)$$

CEP 与 $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ 的关系如图 3 所示。图中红色实线为 $\sigma_{\min}/\sigma_{\max} \in (0, 1)$ 时 CEP/ σ_{\max} 与 $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ 的关系曲线，蓝色虚线为 $\sigma_{\min}/\sigma_{\max} \in (0, 0.3)$ 时采用线性拟合公式 CEP = 0.562 σ_{\max} + 0.615 σ_{\min} 所得的 CEP/ σ_{\max} 与 $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ 的关系曲线。

从图 3 可见，在 $0 < \sigma_{\min}/\sigma_{\max} \leq 0.3$ 时，采用线性拟合公式较采用二次曲线拟合公式会产生较大的误差，且随着 $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ 减小，计算误差增大，

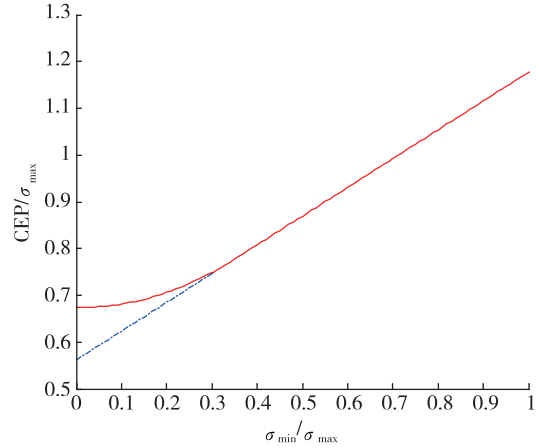


图 3 CEP 与 $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ 关系曲线图

Fig. 3 The relationship between CEP and $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$

最大时误差可达 17%。因此为准确表征 CEP，应采用分段拟合公式，即在 $0 < \sigma_{\min}/\sigma_{\max} \leq 0.3$ 时采用二次曲线拟合公式，在 $0.3 < \sigma_{\min}/\sigma_{\max} < 1$ 时采用线性拟合公式。

CEP 与概率偏差的拟合关系如下

$$CEP = \begin{cases} B_{\max} \left[1.3625 \left(\frac{B_{\min}}{B_{\max}} \right)^2 - 0.0415 \left(\frac{B_{\min}}{B_{\max}} \right) + 1.0 \right] & \frac{B_{\min}}{B_{\max}} \leq 0.3 \\ 0.8332B_{\max} + 0.9118B_{\min} & \frac{B_{\min}}{B_{\max}} > 0.3 \end{cases} \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned} B_{\min} &= \min(B_{\Delta L}, B_{\Delta H}) \\ B_{\max} &= \max(B_{\Delta L}, B_{\Delta H}) \end{aligned} \quad (20)$$

CEP 与 B_{\min}/B_{\max} 的关系如图 4 所示。图中红色实线为 $B_{\min}/B_{\max} \in (0, 1)$ 时 CEP/ B_{\max} 与 B_{\min}/B_{\max} 的关系曲线，蓝色虚线为 $B_{\min}/B_{\max} \in (0, 0.3)$ 时

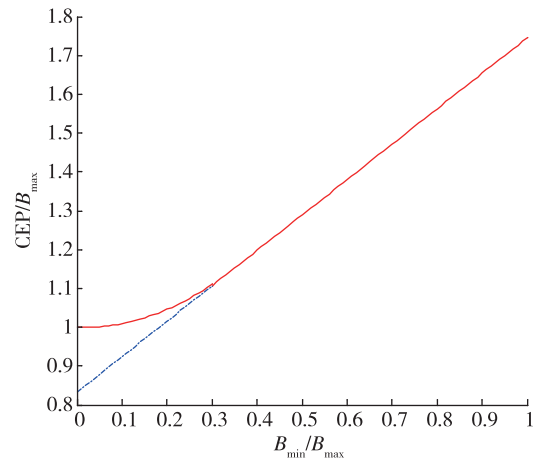


图 4 CEP 与 B_{\min}/B_{\max} 关系曲线图

Fig. 4 The relationship between CEP and B_{\min}/B_{\max}

采用线性拟合公式 $CEP = 0.833 2B_{\max} + 0.911 8B_{\min}$ 所得的 CEP/B_{\max} 与 B_{\min}/B_{\max} 的关系曲线。

从图4可见,在 $0 < B_{\min}/B_{\max} \leq 0.3$ 时,采用线性拟合公式较采用二次曲线拟合公式会产生较大的误差,且随着 B_{\min}/B_{\max} 减小,计算误差增大。因此为准确表征 CEP,应采用分段拟合公式,即在 $0 < B_{\min}/B_{\max} \leq 0.3$ 时采用二次曲线拟合公式,在 $0.3 < B_{\min}/B_{\max} < 1$ 时采用线性拟合公式。

3 结论

本文首先给出了点目标假设下均方根误差、概率偏差和圆概率偏差的定义和计算公式,然后通过理论推导和数值计算给出了二维精度指标相互转换的拟合公式,实现二维精度的快速评估计算。

参考文献

- [1] 韩之俊,姚平中. 概率与统计[M]. 北京:国防工业出版社,1985:107-108.
[2] 马振华. 现代应用数学手册:概率统计与随机过程

[M]. 北京:清华大学出版社,2000.

- [3] 傅惠民. 多元正态分布整体推断方法[J]. 航空动力学报,2005,20(6):905-909.
[4] 张金槐. 远程火箭精度分析与评估[M]. 长沙:国防科技大学出版社,1995.
[5] 杨华波,蔡洪,张士峰. 基于混合验前分布的制导精度评定方法[J]. 航空学报,2009,30(5):855-860.
[6] 唐雪梅,张金槐,邵凤昌. 武器装备小子样试验分析与评估[M]. 北京:国防工业出版社,2001.
[7] 王正明,周海银. 制导工具系统误差估计的新方法[J]. 中国科学(E辑),1998,28(2):160-167.
[8] Berger J O. Statistical decision theory : foundations, concepts, and methods[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.
[9] Papazoglou I A. Bayesian decision analysis and reliability certification [J]. Reliability Engineering and System Safety,1999,66(2):177-198.
[10] 杨华波,张士峰,蔡洪,等. 利用构造性仿真评估导弹精度[J]. 国防科技大学学报,2005,27(2):124-126,130.
[11] 张湘平,张金槐,谢红卫. 关于样本容量、验前信息与 Bayes 决策风险的若干讨论[J]. 电子学报,2003,31(4):536-538.

引用格式:王智,王鹏,何磊,等.点目标假设下的二维精度体系研究[J].宇航总体技术,2023,7(3):15-18.

Citation: Wang Z, Wang P, He L, et al. Research on two-dimensional dispersion index system under the point target hypothesis [J]. Astronautical Systems Engineering Technology, 2023,7(3):15-18.