

基于序列凸优化的高超声速滑翔式 再入轨迹快速优化

赵党军, 梁步阁, 杨德贵, 时伟

(中南大学航空航天大学, 长沙 410083)

摘要: 针对具有热流、动压、过载以及多个禁飞区约束的再入轨迹优化问题, 提出采用序列凸优化方法快速求解。利用归一化时间作为自变量解决终端时间自由问题, 并引入辅助控制变量以减少序列优化结果中的高频振荡, 在此基础上, 通过线性化、离散化和非凸约束的凸化处理, 将非凸非线性优化问题转化为二阶锥规划 (Second Order Conic Programming, SOCP) 问题, 然后采用凸优化求解算法快速求解。数值优化结果与对比验证表明该方法能快速高效求解多约束条件下的再入轨迹优化问题, 且计算效率和性能均优于传统的非线性规划方法。

关键词: 序列凸优化; 再入轨迹优化; 无损凸化; 二阶锥规划

中图分类号: V411

文献标志码: A

文章编号: 2096-4080 (2017) 01-0034-07

Rapid Planning of Reentry Trajectory via Sequential Convex Optimization

ZHAO Dang-Jun, LIANG Bu-Ge, YANG De-Gui, SHI Wei

(School of Aeronautics and Astronautics, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: A sequential convex optimization scheme is proposed for rapid solving the reentry trajectory optimization problem constrained by heat flux, dynamic pressure, normal load, and multiple no-fly zones. The normalized time is used as the independent variable to accommodate the problem of free terminal time, and auxiliary control variables are introduced to alleviate the high frequent chatter in the sequential convex optimization solution. Further, the linearization, discretization, and convexification techniques are used to convert the original concave and nonlinear optimization problem into a standard second order conic programming problem, which can be rapid solved by convex algorithms. Numerical results and comparison study reveal that the proposed method is efficient and effective to solve the problem of reentry trajectory optimization with multiple constraints, and the computational efficiency and performance of the proposed method is superior to that of the classical nonlinear programming.

Key words: Sequential convex optimization; Reentry trajectory optimization; Lossless convexification; Second order conic programming

收稿日期: 2017-03-20; 修订日期: 2017-04-13

基金项目: 湖南省自然科学基金 (14JJ3024)

作者简介: 赵党军 (1978-), 男, 博士, 副教授, 主要从事飞行器制导与控制研究。E-mail: zhao_dj@esu.edu.cn

0 引言

升力式高超声速飞行器具有速度高、突防能力强等优点，近年来受到了国内外各相关领域的密切关注，出现了大量的研究成果^[1]。与现有的亚声速/超声速飞行器相比，高超声速飞行器在近空间的稠密大气层内进行长时间、远距离飞行，其飞行轨迹必须满足热流、动压、过载等方面的约束。另外，考虑到敌方反导系统的探测、追踪以及拦截威胁，在飞行轨迹中还应考虑禁飞区约束，以避免敌方部署反导系统的区域。因此，飞行器轨迹规划是一个典型的强约束条件的动态优化问题^[2]。

到目前为止，求解该类问题的方法总体来说可以分为两类：直接法和间接法^[3]。所谓间接法主要源于庞特里亚金极大值原理，在状态变量基础上扩展协态变量获得哈密顿边值问题（Hamiltonian Boundary Value Problem, HBVP），通过一系列复杂的解析推导计算获得轨迹优化的解^[4-5]，这也使 HBVP 问题的求解异常复杂。为避免复杂的解析推导计算，间接法应运而生。间接法将无限维动态优化问题通过参数化技术转化为有限维的非线性规划（Nonlinear Programming, NLP）问题，然后通过序列二次规划（Sequential Quadratic Programming, SQP）^[6]方法求解，如广泛使用的谱方法^[7-10]就属于典型的间接法。目前，已经有一些较成熟的基于间接法的轨迹优化软件包可供使用，如 GPOPS^[9]、GPOCS^[11]等。然而，SQP 方法无法保证收敛速度，也无法保证必然获得全局最优解。在实际使用过程中，基于 SQP 方法的轨迹优化，对于初值异常敏感，且优化速度较慢。

与一般 NLP 方法相比，凸优化方法具有多项式时间复杂度，收敛速度快，且具有独特的理论优势——定义域内必然收敛，因此受到青睐。特别是在 20 世纪 80 年代，随着快速求解凸优化问题的内点法出现之后^[12]，凸优化方法开始进入很多工程优化领域。最近凸优化方法也开始用于求解轨迹优化这类复杂的非线性动态优化问题。文献^[13-15]主要研究了带动力软着陆的轨迹优化问题，提出无损凸化处理方法，将非凸问题转化为凸优化问题，从而利用对偶内点法快速求解。类似于序列二次规划方法，Liu 等给出了求解一般非凸非线性最优问题的序列凸优化算法^[16]，该算法采用

轨迹线性化、离散化措施将非线性动态约束转化为凸约束，同时为保证线性化系统对原非线性系统的有效近似，增加了可信域约束。在此基础上，Liu 将该方法用于再入轨迹优化之中^[17]：在速度—攻角剖面已知条件下，以能量为自变量对原问题进行转化以避免终端时间自由问题；同时将热流、动压以及过载约束转化为速度—高度边界约束，在此基础上利用序列凸优化算法进行迭代求解获得再入最优轨迹。但以能量为自变量时，在飞行高度较高时，能量变化不显著，导致在高度大于 65km 时的轨迹无法进行离散化并优化。

针对上述问题，提出以归一化时间作为自变量，并选择泛化升力系数和倾侧角作为控制量，同时考虑多禁飞区约束，对高超声速飞行器再入轨迹优化问题的序列凸优化方法做出进一步改进：同时优化泛化升力系数和倾侧角两个控制变量，避免能量为自变量的缺陷。数值优化结果表明，本文所提方法是行之有效的。

1 问题描述

1.1 CAV 再入运动模型

为简化问题，首先假设^[18]：1) 平面静止地球；2) 重力加速度恒定；3) 航迹倾角很小，即 $\sin\gamma \approx \gamma$, $\cos\gamma = 1$ ；4) 有限的控制输入。另外，若 CAV 飞行速度很好时，其阻力系数 C_D 可近似为升力系数 C_L 的函数 $C_L = C_{D_0} + KC_L^2$ ，产生最大升阻比的升力系数 C_L^* 和阻力系数 C_D^* ，分别为 $C_L^* = \sqrt{C_{D_0}/K}$ 和 $C_D^* = 2C_{D_0}$ 。定义最大升阻比 L/D 为

$$E^* = C_L^*/C_D^* = 1/2\sqrt{KC_{D_0}}$$

定义泛化升力系数为 $\lambda = C_L/C_L^*$ ，相应的升力系数和阻力系数可以表示为泛化升力系数的函数，即

$$C_L = \lambda C_L^*, C_D = \frac{C_L^*}{2E^*} (1 + \lambda^2)$$

基于上述假设和关于泛化升力系数的定义，建立再入飞行器无量纲运动方程为^[2]：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos\theta \\ \dot{y} &= v \sin\theta \\ \dot{h} &= v\gamma \\ \dot{v} &= -Bv^2 e^{-\beta R_e h} (1 + \lambda^2) / 2E^* \\ \dot{\gamma} &= Bve^{-\beta R_e h} \lambda \cos\sigma - 1/v + v \\ \dot{\theta} &= Bve^{-\beta R_e h} \lambda \sin\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

其中， $\dot{*} = d^*/dt$ ， t 为无量纲时间， x 、 y 为水平

位置, h 为无量纲高度, v 为无量纲速度, γ 为弹道倾角, θ 为航向角, σ 为倾侧角, 常数 $B = \rho_0 R_e S_{\text{ref}} C_L^* / (2m)$ 与海平面大气密度 ρ_0 、地球平均半径 R_e 、飞行器气动特征面积 S_{ref} 以及飞行器质量 m 相关。令式 (1) 中状态向量为 $\mathbf{x} = [x, y, h, v, \gamma, \theta]^T$, 控制量为 $\mathbf{u} = [\lambda, \sigma]^T$, 则式 (1) 可以改写为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2)$$

1.2 约束条件

再入过程中, CAV 轨迹需满足一系列约束以保证飞行器安全。总体来说飞行约束分为等式约束和不等式约束。

(1) 等式约束

根据事先确定的飞行器起点位置和目标位置, 形成如下等式约束:

$$\Phi[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}_0] = 0, \quad \Psi[\mathbf{x}(t_f), \mathbf{x}_f] = 0 \quad (3)$$

值得注意的是, 很多时候只指定了终端状态中的部分状态, 如只规定了终端时的位置, 也有可能只是规定了上下限, 于是形成了不等式约束。

(2) 不等式约束

不等式约束主要包括关于热流、动压和过载的约束

$$\dot{Q} = k_Q \rho^{0.5} (v \sqrt{g_e R_e})^3 \leq \dot{Q}_{\text{max}} \quad (4)$$

$$q = \frac{1}{2} \rho (v \sqrt{g_e R_e})^2 \leq q_{\text{max}} \quad (5)$$

$$\frac{\sqrt{L^2 + D^2}}{m g_e} = \frac{\rho R_e v^2 S_{\text{ref}} C_L^{*2}}{2m} \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1 + \lambda^2}{2E^*}\right)^2} \leq n_{\text{max}} \quad (6)$$

其中, \dot{Q}_{max} (W/m^2)、 q_{max} (N/m^2) 和 n_{max} 分别是最大允许的热流、动压和过载。大气密度 ρ 近似为高度的指数函数

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta R_e h} \quad (7)$$

其中, $h = (R - R_e) / R_e$ 无量纲高度。为方便后续处理, 对式 (4) ~ 式 (6) 进行归一化处理, 得

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \bar{k}_Q e^{-0.5\beta R_e h} v^3 - 1 \\ \bar{k}_q e^{-\beta R_e h} v^2 - 1 \\ \bar{k}_n e^{-\beta R_e h} v^2 \sqrt{4E^{*2} \lambda^2 + (1 + \lambda^2)^2} - 1 \end{bmatrix} \leq 0_{3 \times 1} \quad (8)$$

其中,

$$\bar{k}_Q = k_Q \rho_0 (\sqrt{g_e R_e})^3 / \dot{Q}_{\text{max}}, \quad \bar{k}_q = 0.5 \rho_0 g_e R_e / q_{\text{max}}, \\ \bar{k}_n = 0.5 \rho_0 R_e S_{\text{ref}} C_L^{*2} / (m n_{\text{max}})。$$

禁飞区也可以表示为不等式约束, 考虑 n_{NFZ} 个禁飞区可以用其中心位置 $\mathbf{C}_j^{\text{NFZ}} = [x_j, y_j]^T$, ($j=1, \dots, n_{\text{NFZ}}$) 和相应的 R_j^{NFZ} 来进行描述, 因此禁飞区约束由式 (9) 给出

$$N(\mathbf{x}(t), \mathbf{C}_j^{\text{NFZ}}) = \left\| [x - x_j \quad y - y_j] \right\|^T \geq R_j^{\text{NFZ}} \quad (9)$$

除上述不等式约束外, 施加于控制量上的限制也应考虑: 倾侧角 σ 通常限制于某些特定区间 (如 $[-\pi/3, \pi/3]$) 以保证飞行稳定性; 泛化升力系数 λ 因气动特性有所限制, 因此有如下关于控制变量的约束

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} |\sigma| - \sigma_{\text{max}} \\ \lambda - 2 \\ -\lambda \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad (10)$$

1.3 优化问题描述

综合考虑上述 CAV 运动模型以及相关约束条件, 以时间最优为指标, CAV 再入轨迹优化问题可以描述为

$$\text{P0: } \min \int_0^{t_f} 1 dt \\ \text{subject to: } (2), (3), (8), (9), (10)$$

2 序列凸优化算法

2.1 问题重新描述

优化问题 P0 为终端时间自由最优控制问题, 由于终端时间自由不利于后续的离散化处理, 文献 [17] 采用广义能量为自变量以避免终端时间自由问题, 但这种解决方案在高度大于 65km 时, 由于能量变化不显著, 导致无法进行离散化。为解决此问题, 采用归一化时间, 并引入终端时间作为新的控制变量来解决时间自由问题。按照一般对时间自由问题的处理方法, 将时间由 $[0, t_f]$ 映射至 $[0, 1]$ 区间, 即令 $\tau = t/t_f \in [0, 1]$, 并将状态扩展一维至 $\tilde{\mathbf{x}} = [\mathbf{x}^T, t]^T \in \mathbf{R}^7$, 同时将终端时间 t_f 作为新的控制变量, 而新的等价性能指标变为 $J = t(1)$ 。

此外, 若直接选择倾侧角 σ 和泛化升力系数 λ 作为控制变量, 则会出现如文献 [17] 指出的控制量高频抖动现象, 对飞行稳定不利, 因此引入新的辅助控制变量, 令

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda \cos \sigma, & u_2 &= \lambda \sin \sigma, \\ u_3 &= \lambda^2 = u_1^2 + u_2^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad t_f]^T$$

控制约束可以改写为

$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{u}}, \tau) = \begin{bmatrix} -u_3 \\ u_3 - 4 \\ -u_1 - u_2 \tan \sigma_{\max} \\ u_1 - u_2 \tan \sigma_{\max} \\ -t_f \end{bmatrix} \leq 0 \quad (12)$$

同时, 应保证式 (13) 的等式约束成立。

$$C_e = u_1^2 + u_2^2 - u_3 = 0 \quad (13)$$

至此, 问题 P0' 与下面的问题 P1 等价。

$$P1: \min t(1) \quad (14)$$

$$\text{subject to } \tilde{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} t_f \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tau) \\ t_f \end{bmatrix} = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tau) \quad (15)$$

$$\Phi(\tilde{\mathbf{x}}(0), \mathbf{x}_0) = 0, \quad \Psi(\tilde{\mathbf{x}}(1), \mathbf{x}_f) = 0 \quad (16)$$

$$\mathbf{G}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tau) \leq 0 \quad (17)$$

$$\mathbf{C}(\tilde{\mathbf{u}}, \tau) \leq 0 \quad (18)$$

$$C_e(\tilde{\mathbf{u}}, \tau) = 0 \quad (19)$$

其中, $(\cdot)' = d/d\tau$, $\tau \in [0, 1]$, 约束 (17) 为不等式约束 (8) 和 (9) 的一般形式。问题 P1 中的指标函数 $J = t(1)$, 表示为扩展状态 t 在终端时刻 $\tau = 1$ 时的大小, 即 t_f 。显然, 问题 P0 中的 Lagrange 项转化为问题 P1 中的 Mayer 项, 成为一个线性函数, 从而使得问题 P1 满足 SOCP 问题对于指标函数为凸函数的要求, 且问题 P1 的解必然是问题 P0 的解。

2.2 线性化

在序列凸优化求解问题 P1 过程中, 动态方程 (15) 须沿第 k 次迭代后的轨迹 $\{\tilde{\mathbf{x}}^k(\tau), \tilde{\mathbf{u}}^k(\tau)\}$ 进行线性化处理, 即

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}^k(\tilde{\mathbf{x}}^k, \tilde{\mathbf{u}}^k, \tau)\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}^k(\tilde{\mathbf{x}}^k, \tilde{\mathbf{u}}^k, \tau)\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^k(\tilde{\mathbf{x}}^k, \tilde{\mathbf{u}}^k, \tau) \quad (20)$$

其中, 雅克比矩阵定义为 $\mathbf{A}^k = \partial \mathbf{h} / \partial \tilde{\mathbf{x}}$, $\mathbf{B}^k = \partial \mathbf{h} / \partial \tilde{\mathbf{u}}$ 。此外余项可根据下式计算得到。

$$\mathbf{C}^k(\tilde{\mathbf{x}}^k, \tilde{\mathbf{u}}^k, \tau) = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{x}}^k, \tilde{\mathbf{u}}^k, \tau) - \mathbf{A}^k(\tilde{\mathbf{x}}^k, \tilde{\mathbf{u}}^k, \tau)\tilde{\mathbf{x}}^k - \mathbf{B}^k(\tilde{\mathbf{x}}^k, \tilde{\mathbf{u}}^k, \tau)\tilde{\mathbf{u}}^k$$

为保证线性化系统式 (20) 合理逼近原系统式 (15), 状态及控制偏差应限制于可信域内, 即

$$\|\mathbf{X} - \mathbf{X}^k\| < \epsilon e, \quad \mathbf{X} = [\tilde{\mathbf{x}}^T, \tilde{\mathbf{u}}^T]^T, \quad \epsilon e \in \mathbf{R}^{11} \quad (21)$$

该式包含 11 个不等式, 即扩展状态和控制量的每一项都应满足上述不等式, 即 $|\tilde{x}_i - \tilde{x}_i^k| \leq \epsilon_i$ ($i = 1, \dots, 7$), $|\tilde{u}_j - \tilde{u}_j^k| \leq \epsilon_j$, $j = 1, \dots, 4$ 。

2.3 凸化处理

问题 P1 中, 路径约束式 (17) 和控制约束式 (18) 和式 (19) 都是非凸的, 为使问题能用凸优化方法求解, 必须对这些非凸约束进行凸化处理。

2.3.1 路径约束的凸化处理

路径约束式 (17) 中包含 m 个不等式约束, 即

$$g_p(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tau) \leq 0, \quad (p = 1, \dots, m) \quad (22)$$

显然上述不等式约束是非凸约束, 因此必须进行凸化处理才能使用 SOCP 方法求解。采用文献 [16] 的方法, 将约束式 (22) 沿前次优化所得轨迹 \mathbf{X}^k (即 $\{\tilde{\mathbf{x}}^k(\tau), \tilde{\mathbf{u}}^k(\tau)\}$) 进行线性化处理, 采用 1 阶逼近形式, 获得近似的线性不等式约束, 即

$$g_p(\mathbf{X}^k) + \nabla g_p^T(\mathbf{X}^k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^k) \leq 0 \quad (23)$$

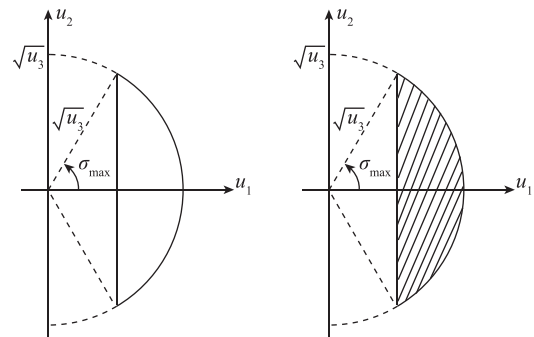
其中, $\nabla g_p(\mathbf{X}^k)$ 是 g_p 在 \mathbf{X}^k 处的梯度。显然, 由式 (21) 定义的可信域是保证线性化不等式约束式 (23) 合理逼近原不等式约束式 (22) 的必要前提条件。文献 [16] 的引理 1 在理论上分析了采用这种线性逼近方式所得到的解是原问题的解。

2.3.2 控制约束的凸化处理

由于辅助控制变量的引入, 增加了关于控制量的等式约束式 (19), 显然该约束非凸, 对其进行松弛处理, 即将等式约束放宽为不等式约束

$$u_1^2 + u_2^2 \leq u_3 \quad (24)$$

图 1 (a) 显示等式约束式 (19) 的可行域为一段弧, 图 1 (b) 中的阴影部分包含边界表示不等式约束式 (24) 的可行域。辅助控制量 u_1 和 u_2 的取值范围由 $\sqrt{u_3}$ 以及最大倾侧角 σ_{\max} 共同决定。



(a) 等式约束可行域: 实线弧 (b) 不等式约束: 阴影含边界

图 1 控制约束凸化处理

2.4 离散化

要求解问题 P1, 需对线性化动态方程式 (20) 在 $\tau \in [0, 1]$ 上进行离散化, 同时所有约束转化为这些离散点上的约束。令 $\Delta\tau = 1/N$ 和 $\tau = j\Delta\tau$, ($j=0, 1, \dots, N$), 即自变量 τ 被等分为 N 段, 相应的状态向量 $\tilde{\mathbf{x}}$ 和控制向量 $\tilde{\mathbf{u}}$ 按照 $\tilde{\mathbf{x}}_j = \tilde{\mathbf{x}}(\tau_j)$ 和 $\tilde{\mathbf{u}}_j = \tilde{\mathbf{u}}(\tau_j)$ 进行离散化。相应的, 采用欧拉法离散化后的数值积分形式为

$$\tilde{\mathbf{x}}_{j+1} - \tilde{\mathbf{x}}_j = \Delta\tau (\mathbf{A}_j^k \tilde{\mathbf{x}}_j + \mathbf{B}_j^k \tilde{\mathbf{u}}_j + \mathbf{C}_j^k) \quad (25)$$

其中, $j=0, \dots, N$ 。重新排列合并相同项, 得

$$\tilde{\mathbf{x}}_{j+1} = (\Delta\tau \mathbf{A}_j^k + \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{x}}_j + \Delta\tau \mathbf{B}_j^k \tilde{\mathbf{u}}_j + \Delta\tau \mathbf{C}_j^k \quad (26)$$

其中 \mathbf{I} 是与 \mathbf{A}_j^k 维数相同的单位阵。

经过上述线性化、凸化以及离散化处理后, 问题 P1 的最优解可以通过求解下面序列优化问题 P2 来进行求解。

$$\text{P2: min } t(1) \quad (27)$$

$$\text{subject to } \tilde{\mathbf{x}}_{j+1} = (\Delta\tau \mathbf{A}_j^k + \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{x}}_j + \Delta\tau \mathbf{B}_j^k \tilde{\mathbf{u}}_j + \Delta\tau \mathbf{C}_j^k, (j=1, \dots, N) \quad (28)$$

$$\Phi(\tilde{\mathbf{x}}(0), \mathbf{x}_0) = 0, \quad \Psi(\tilde{\mathbf{x}}(1), \mathbf{x}_f) = 0 \quad (29)$$

$$g_i(\mathbf{X}^k) + \nabla g_i^T(\mathbf{X}^k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^k) \leq 0 \quad (30)$$

$$u_1^2 + u_2^2 \leq u_3 \quad (31)$$

$$0 \leq u_3 \leq 4 \quad (32)$$

$$-\tan(\sigma_{\max})u_1 \leq u_2 \leq \tan(\sigma_{\max})u_1 \quad (33)$$

$$|\mathbf{X} - \mathbf{X}^k| < \epsilon, \quad \mathbf{X} = [\tilde{\mathbf{x}}^T, \tilde{\mathbf{u}}^T], \quad \epsilon \in \mathbf{R}^{11} \quad (34)$$

其中, $\tau \in [0, 1]$, ($i=1, \dots, m, k=1, 2, \dots$)。可以证明经松弛处理后问题 P2 的解是原问题 P1 的解 (参见文献 [17])。

2.5 序列凸优化算法

显然, 问题 P2 是 SOCP 问题, 其目标函数为线性的, 且各约束或者为线性函数, 或者为二阶锥约束形式。如果选择足够小的离散化步长, SOCP 问题 P2 的解与优化问题 P1 充分接近。求解问题 P2 的序列凸优化算法流程如下:

Step 1: 令 $k=0$, 选择初始控制剖面 $\tilde{\mathbf{u}}_0^0$ (如 $\lambda=1, \sigma=0$), 在此控制输入下, 对飞行器运动方程进行积分, 从而获得初始状态轨迹 $\tilde{\mathbf{x}}^0$;

Step 2: 在第 $(k+1)$ 次迭代中, 利用前次轨迹 $\{\tilde{\mathbf{x}}^k, \tilde{\mathbf{u}}^k\}$ 建立 SOCP 问题 P2, 同时逐点检查式 (34) 中的热流、动压以及过载和禁飞区等约束违反情况, 若所有或部分约束违反, 则在问题 P2 中施

加式中相应的凸化约束, 然后利用 SOCP 算法求解获得最优解 $\mathbf{X}_i^{k+1} = [(\tilde{\mathbf{x}}_i^{k+1})^T, (\tilde{\mathbf{u}}_i^{k+1})^T]^T$ 。

Step3: 检查下面的收敛条件是否满足

$$\max_i |\tilde{\mathbf{x}}_i^{k+1} - \tilde{\mathbf{x}}_i^k| \leq \delta \quad (35)$$

式 (35) 包含多个逐元不等式, δ 是实现指定的充分小的数。若收敛条件满足式 (35), 则转至 Step 4, 否则, 令 $\mathbf{X}_i^k = \mathbf{X}_i^{k+1}$, $k = k + 1$, 转至 Step2。

Step 4: 优化问题 P0 的解为 \mathbf{X}_i^{k+1} , 迭代停止。

3 数值优化结果

本文以 CAV 为例在 MATLAB 环境中进行数值优化求解以验证上述算法的有效性。为方便算法实施, 采用 Yalmip 建模工具箱^[19]进行优化问题建模, 利用轻量级凸优化求解算法包 ECOS^[20]进行 SOCP 问题求解。所有优化算法运行的计算机配置为: CPUi7-4790@3.6GHz, 8G 内存。

表 1 给出了 CAV 任务描述, 给出了任务起点和目标点的水平位置、高度, 并给出了禁飞区的中心点坐标以及半径。优化过程中禁飞区次序未知, 但根据算法流程步骤 2 中的逐点检测可以方便地施加禁飞区约束。第一个禁飞区的半径远小于 CAV 的转弯能力, 第二个禁飞区半径则足够大。

表 1 CAV 任务描述

	纬度/ (°)	经度/ (°)	半径/km
初始位置	N 28.5	W -80.6	
禁飞区 1	N 20.1	W -3.4	177.7920
禁飞区 2	N 55.6	E 58.5	277.8000
目标位置	N 31.2	E 65.7	

各种路径约束条件为: $\dot{Q}_{\max} = 4000 \text{ kW/m}^2$, $q_{\max} = 5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, $n_{\max} = 3.5g_e$ 。边界条件: $h_0 = 122 \text{ km}$, $v_0 = 7315.2 \text{ m/s}$, $\gamma_0 = -1.5^\circ$, $\theta_0 = 4^\circ$, $h_f = 20 \text{ km}$, $v_f = 2000 \text{ m/s}$, $\gamma_f = -4^\circ$ 。终端航向角未作约束。倾侧角限制为 $\sigma_{\max} = \pi/3$ 。式 (34) 中的可信域设置为

$$|\mathbf{X} - \mathbf{X}^k| \leq \left[0.2, 0.2, \frac{10000}{R_e}, \frac{5000}{\sqrt{g_e R_e}}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 0.5, 0.5, 0.5, 1, 0.5 \right]^T$$

式 (35) 中的迭代收敛停止条件设置为 $\delta = 0.03$, 离散化区间 $\Delta\tau = 1/300$, 即 $N = 300$ 。

为对比说明本文所提方法的有效性, 将序列凸优化求解结果 (记为 SOCP) 与伪谱法求解结果

(记做 GPOPS) 进行了对比, 其中伪谱法求解主要基于开源 Matlab 工具箱 GPOPS^[21] 进行。

数值求解过程中, 序列凸优化 SOCP 经过 7 次迭代获得最优解, 整个优化计算的 CPU 时间为 8.918s, 而 GPOPS 优化则需要 21.109s; SOCP 和 GPOPS 求得的最优飞行时间分别是 2869.2s 和 3061.7s, 显然, 序列凸优化方法无论是效率还是性能上都要明显优于 GPOPS。两种方法的优化结果如图 2~图 6 所示。

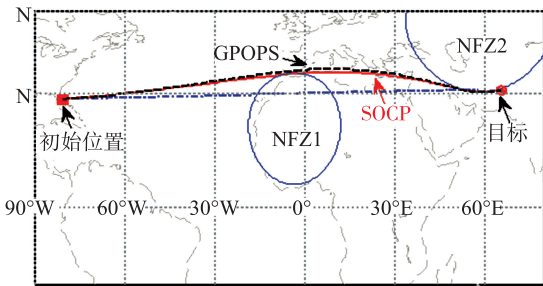


图 2 CAV 地面航迹

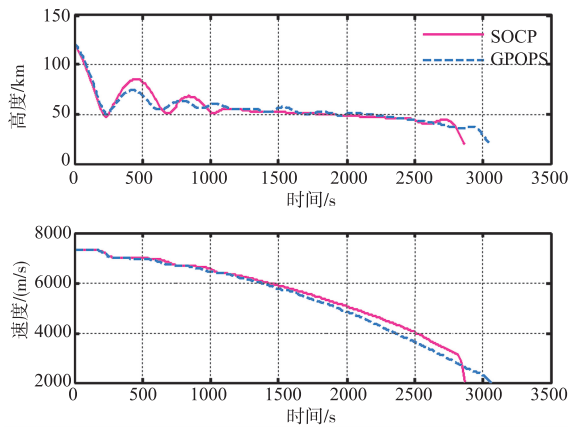


图 3 CAV 高度与速度曲线

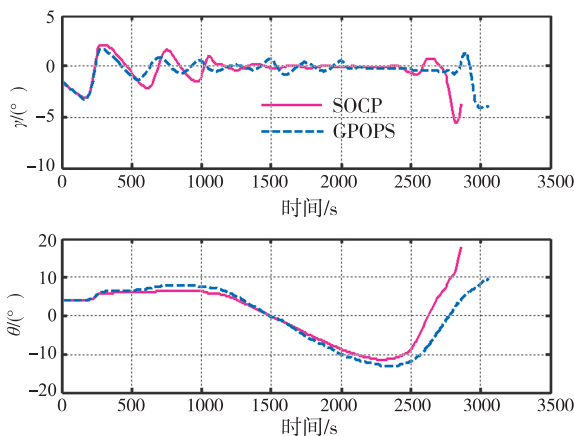


图 4 CAV 弹道倾角和航向角曲线

图 2 为地面航迹, 可以看出 SOCP 解和 GPOPS 解都满足两个禁飞区约束, 但 SOCP 的轨迹更逼近禁飞区的边界。图 3 是高度曲线和速度曲

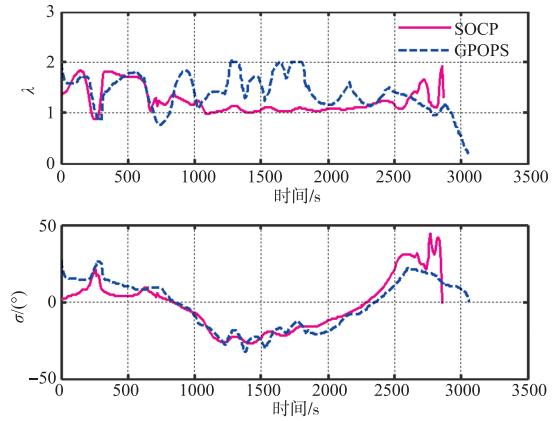


图 5 CAV 控制变量曲线

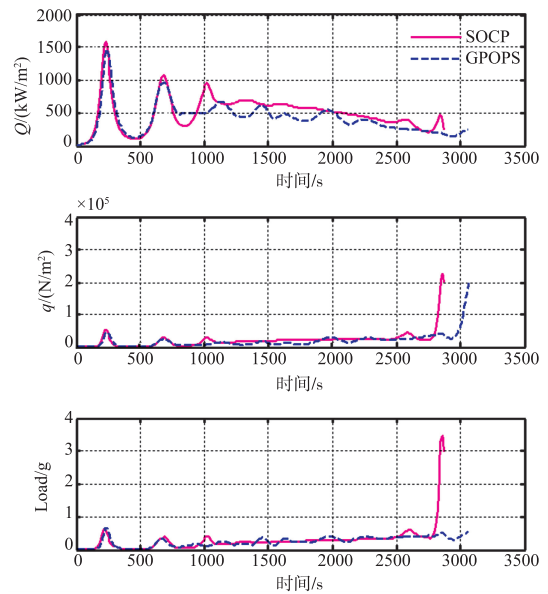


图 6 CAV 热流、动压和过载曲线

线, 两种方法的解均严格满足终端高度和速度约束, 其中 SOCP 解的高度曲线变化更加平滑。两种优化方法得到的弹道倾角和航向角曲线变化趋势与幅度 (如图 4 所示) 基本保持一致, 弹道倾角变化较小, 航向角平滑。图 5 给出泛化升力系数和倾侧角曲线, 整个过程均满足控制变量约束条件, 但 GPOPS 得到的控制量抖动幅度较大, 而 SOCP 由于引入新的控制变量进行松弛处理, 抖动幅度较小。图 6 给出了两种方法得到的热流、动压以及过载曲线, 从图中可以看出, 尽管 SOCP 方法中过载曲线末端较大, 但所有约束在整个过程中均满足给定条件。

4 结论

具有热流、动压、过载以及禁飞区约束的再入轨迹优化问题是一个强约束的非线性动态规划问题, 本文通过引入归一化时间和辅助控制变量,

结合轨迹线性化和无损凸化处理技术,将原问题转化为标准的SOCP问题,利用开源凸优化求解器ECOS求解,快速获得最优轨迹。归一化时间尽管增加了控制变量,但有效避免了终端时间自由所带来的离散化问题,同时也避免了以能量为自变量时无法从起始点进行离散化的缺陷。辅助控制变量的引入则在一定程度上避免了序列优化过程中容易引起的控制量高频振荡的不利因素,提高了优化解的工程适用性。数值优化结果以及对比实验结果表明,本文所提方法是一种行之有效的再入轨迹快速优化方法,计算效率和性能均优于传统的非线性规划方法。

参考文献

- [1] Lu P. Entry guidance: a unified method [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2014, 37 (3): 713-729.
- [2] Jorris T R, Cobb R G. Three-dimensional trajectory optimization satisfying waypoint and no-fly zone constraints [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2009, 32 (2): 551-572.
- [3] Rao A V. A survey of numerical methods for optimal control [J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2010, 135 (1): 1-32.
- [4] Poustini M J, Esmaelzadeh R, Adami A. A new approach to trajectory optimization based on direct transcription and differential flatness [J]. *Acta Astronautica*, 2015, 107: 1-13.
- [5] Petropoulos A E, Sims J A. A review of some exact solutions to the planar equations of motion of a thrusting spacecraft [C]. *NASA Jet Propulsion Laboratory Technical Reports*, USA, 2002.
- [6] Betts J T. Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 120: 27-40.
- [7] Williams P. Hermite-Legendre-Gauss-Lobatto direct transcription in trajectory optimization [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2009, 32 (4): 1392-1395.
- [8] Zhao J, Zhou R, Jin X. Reentry trajectory optimization based on a multistage pseudospectral method [J]. *Scientific World Journal*, 2014, 2014: 1-13.
- [9] Garg D, Patterson M, Darby C, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation of general optimal control problems using a Radau pseudospectral method [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2011, 49 (2): 335-358.
- [10] Chai D, Fang Y W, Wu Y L, et al. Boost-skipping trajectory optimization for air-breathing hypersonic missile [D]. *Astronautical Science and Technology*, 2007.
- [11] Huntington G T. Advancement and analysis of a Gauss pseudospectral transcription for optimal control problems [J]. *Massachusetts Institute of Technology*, 2007.
- [12] Andersen E D, Roos C, Terlaky T. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization [J]. *Mathematical Programming*, 2003, 95 (2): 249-277.
- [13] Blackmore L, Acikmese B, Scharf D P. Minimum-landing-error powered-descent guidance for Mars landing using convex optimization [J]. *Journal of Guidance Control, and Dynamics*, 2010, 33 (4): 1161-1171.
- [14] Açikmeşe B, Ploen S R. Convex programming approach to powered descent guidance for Mars landing [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2007, 30 (5): 1353-1366.
- [15] Açikmeşe B, Carson J M, Blackmore L. Lossless convexification of nonconvex control bound and pointing constraints of the soft landing optimal control problem [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21 (6): 2104-2113.
- [16] Liu X F, Lu P. Solving nonconvex optimal control problems by convex optimization [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2014, 37 (3): 750-765.
- [17] Liu X F, Shen Z J, Lu P. Entry trajectory optimization by second-order cone programming [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics (Articles in Advance)*, 2015, 39 (2): 1-15.
- [18] Jorris T R. Common aero vehicle autonomous reentry trajectory optimization satisfying waypoint and no-fly zone constraints [D]. *Doctor, Engineering and Management*, Air University, Ohio, US, 2007.
- [19] Löfberg J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB2004 [C]. *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004.
- [20] Domahidi A, Chu E, Boyd S. ECOS: an SOCP solver for embedded systems [C]. *European Control Conference*, Zurich, Switzerland, 2013.
- [21] Garg D, Hager W W, Rao A V. Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems [J]. *Automatica*, 2011, 47: 829-837.